

支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

李修成

计算机科学与技术学院

点覆盖集与点独立集

边覆盖集与边独立集

二分图中的匹配

点着色与边着色

作业

Notation

点覆盖集	vertex cover	点覆盖数	α_0
点独立集	vertex independent set	点独立数	β_0
支配集	dominating set	支配数	γ_0
边覆盖集	edge cover	边覆盖数	α_1
边独立集	edge independent set	边独立数	β_1
点着色	vertex coloring	点色数	χ
边着色	edge coloring	边色数	χ'

- 边独立集又称匹配，边独立数又称匹配数.
- $\alpha_0 + \beta_0 = n = \alpha_1 + \beta_1$.
- 一个图的点色数 vertex chromatic number 被称为其色数 chromatic number.

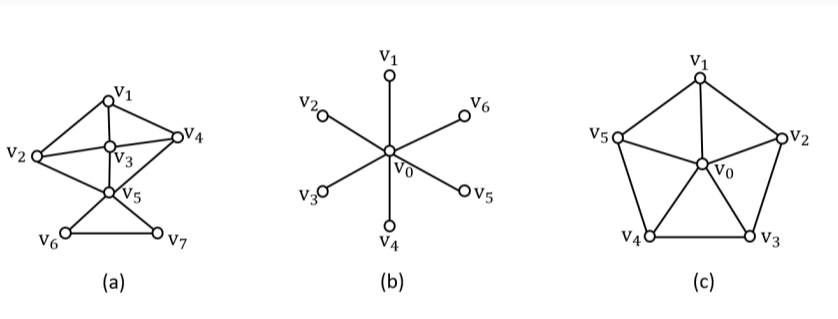
点覆盖集与点独立集

定义 1.1 (点覆盖集 vertex cover). 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$,

- 若 $\forall e \in E, \exists v \in V^*$ 使的 v 与 e 相关联, 则称 V^* 为 G 的**点覆盖集**, 并称 v **覆盖** e .
- 点覆盖集简称点覆盖.
- 设 V^* 是 G 的点覆盖, 若 V^* 的任何真子集都不是点覆盖, 则称 V^* 为**极小点覆盖**.
- G 的顶点个数最少的点覆盖称为 G 的**最小点覆盖**.
- 最小点覆盖中的顶点个数称作 G 的**点覆盖数**, 记作 $\alpha_0(G)$, 简记为 α_0 .

实例

例子 1.1.

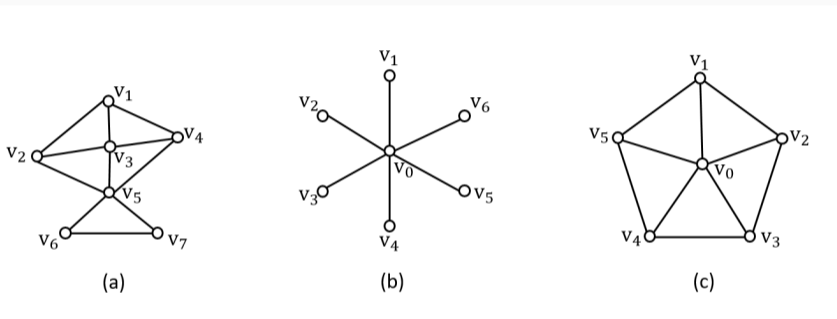


定义 1.2 (点独立集 *vertex independent set*). 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$,

- 若 V^* 中任何两个顶点均不相邻, 则称 V^* 为 G 的**点独立集**, 简称为**独立集**.
- 若 V^* 再加入任何其他的顶点都不是独立集, 则称 V^* 为**极大点独立集**.
- G 的顶点数最多的点独立集称作 G 的**最大点独立集**.
- 最大独立集的顶点数称作 G 的**点独立数**, 记作 $\beta_0(G)$, 简记为 β_0 .
- 若 V^* 为独立集, 则 $\overline{V^*}$ 中的顶点可以关联 G 中所有边, 即 $I_G(\overline{V^*}) = E$.
- 假设边 $\{u, v\} \in E$ 无法被 $\overline{V^*}$ 中的顶点关联, 则 $u, v \in V^*$, 这与 V^* 为独立集矛盾.
- 考虑导出子图 $G[V^*]$, $E(G[V^*])$ 与 $I_G(\overline{V^*})$ 有何关联?

实例

例子 1.2.



(a) $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_4, v_7\}$ 为极大点独立集, $\{v_2, v_4, v_7\}$ 为最大点独立集, $\beta_0 = 3$.

(b) $\{v_0\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 为极大点独立集, $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 为最大点独立集, $\beta_0 = 6$.

(c) $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$ 等均为极大点独立集, 也都是最大点独立集, $\beta_0 = 2$.

点覆盖集与点独立集的关系

定理 1.1. 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 为 G 的点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 为 G 的点独立集.

证明. (\Rightarrow) 若存在 $u, v \in \overline{V^*}$ 相邻, 即 $\{u, v\} \in E$ 且 u, v 都不在 V^* 中, 则 V^* 无法覆盖 $\{u, v\}$, 与 V^* 为点覆盖矛盾. 故 $\overline{V^*}$ 中顶点互不相邻, 即 $\overline{V^*}$ 为点独立集.

(\Leftarrow) 由于 $\overline{V^*} = V - V^*$ 是点独立集, 因而任意一条边都与 V^* 中某个顶点关联, 故 V^* 是 G 的点覆盖.

推论 1.1. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶无向图, $V^* \subseteq V$, 则 V^* 是 G 的极小 (最小) 点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V - V^*$ 是 G 的极大 (最大) 点独立集, 从而有

$$\alpha_0 + \beta_0 = n.$$

点覆盖集与点独立集的关系

证明. 先证, 若 V^* 是极小点覆盖, 则 $\overline{V^*}$ 是极大独立集. 首先, 若 V^* 是极小点覆盖, 由定理 1.1 知 $\overline{V^*}$ 为独立集. 若 $\overline{V^*}$ 不是极大独立集, 则可以从 $\overline{V^*}$ 选择一个顶点 v 使的 $\overline{V^*} \cup \{v\}$ 为独立集. 而 $\overline{V^*} \cup \{v\}$ 为独立集, 则由定理 1.1 知 $V^* - \{v\} \subset V^*$ 依然为点覆盖, 这与 V^* 是极小点覆盖矛盾.

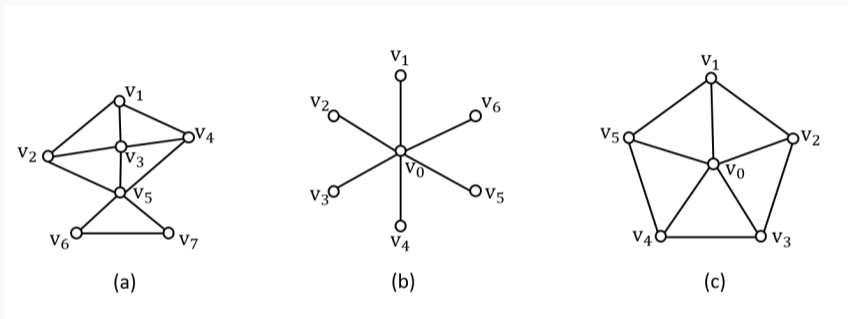
再证, 若 $\overline{V^*}$ 是极大独立集, 则 V^* 是极小点覆盖.

定义 1.3 (支配集 dominating set). 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $V^* \subseteq V$,

- 若 $\forall v \in V - V^*, \exists u \in V^*$ 使的 $\{u, v\} \in E$, 则称 V^* 为 G 的**支配集**, 并称 u **支配** v .
- 设 V^* 是 G 的支配集, 且 V^* 的任何真子集都不是支配集, 则称 V^* 为**极小支配集**.
- G 的顶点数最少的支配集称作 G 的**最小支配集**.
- 最小支配集中顶点的个数称作 G 的**支配数**, 记作 $\gamma_0(G)$, 简记为 γ_0 .

实例

例子 1.3.



(a) $\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_2, v_4, v_7\}$ 为极小支配集, $\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 2$.

(b) 7 阶星形图, $\{v_0\}, \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ 为极小支配集, $\{v_0\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 1$.

(c) 轮图 W_6 , $\{v_0\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}$ 等都是极小支配集, $\{v_0\}$ 是最小支配集, $\gamma_0 = 1$.

极大点独立集和极小支配集的关系

定理 1.2. 无向简单图的极大点独立集都是极小支配集.

证明. 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, V^* 为 G 的极大独立集, 则 $\forall v \in V - V^*, \exists v' \in V^*$ s.t. $\{v, v'\} \in E$, 否则 $\exists v_0 \in V - V^*$ 不与 V^* 中任何顶点相邻, 因而 $V^* \cup \{v_0\}$ 仍为独立集, 这与 V^* 是极大独立集矛盾. 所以, V^* 是 G 的支配集.

又由于 V^* 是点独立集, 因而对任何 $V_1 \subset V^*$, $V^* - V_1$ 中的顶点都不受 V_1 中顶点支配, 即 V_1 不是支配集, 所以 V^* 是极小支配集.

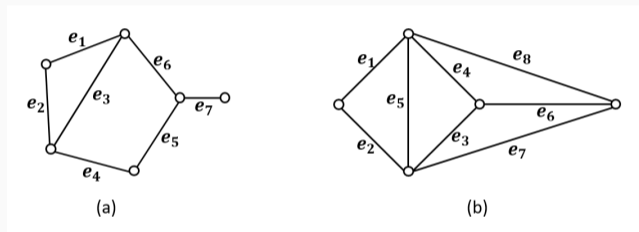
定理1.2的逆命题不成立, 极小支配集中的点未必独立.

边覆盖集与边独立集

定义 2.1 (边覆盖集 edge cover). 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$ 没有孤立点, $E^* \subseteq E$,

- 若 $\forall v \in V, \exists e \in E^*$, 使得 v 与 e 相关联, 则称 E^* 为**边覆盖集**, 并称 e **覆盖** v .
- 边覆盖集简称边覆盖.
- 设 E^* 为边覆盖, 若 E^* 的任何真子集都不是边覆盖, 则称 E^* 为**极小边覆盖**.
- G 的边数最少的边覆盖称为 G 的**最小边覆盖**.
- 最小边覆盖中的边数称作 G 的**边覆盖数**, 记作 $\alpha_1(G)$, 或简记为 α_1 .

例子 2.1.



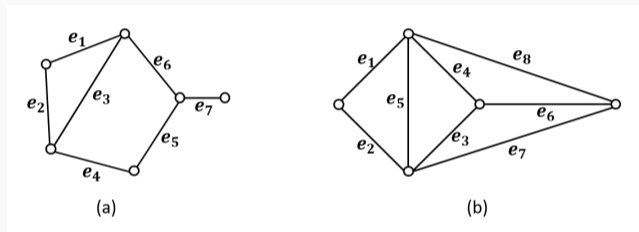
(a) $\{e_1, e_4, e_7\}$, $\{e_2, e_5, e_6, e_7\}$ 为极小边覆盖, $\{e_1, e_4, e_7\}$ 是最小边覆盖, $\alpha_1 = 3$.

(b) $\{e_1, e_3, e_6\}$, $\{e_2, e_4, e_8\}$ 为极小边覆盖, 也都是最小边覆盖, $\alpha_1 = 3$.

定义 2.2 (边独立集 *edge independent set*). 设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, $E^* \subseteq E$,

- 若 E^* 中任何两条边均不相邻, 则称 E^* 为 G 的**边独立集**, 也称作 G 的**匹配**.
- 若在 E^* 中再加任意一条边后, 所得集合都不是匹配, 则称 E^* 为**极大匹配**.
- G 的边数最多的匹配称作**最大匹配**.
- 最大匹配中的边数称作**边独立数**或**匹配数**, 记作 $\beta_1(G)$ 或简记为 β_1 .

例子 2.2.



(a) $\{e_2, e_6\}$, $\{e_3, e_5\}$, $\{e_1, e_4, e_7\}$ 为极大匹配, $\{e_1, e_4, e_7\}$ 是最大匹配, $\beta_1 = 3$.

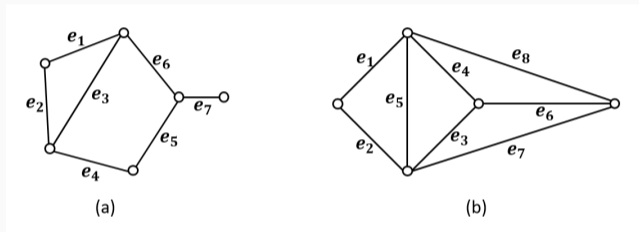
(b) $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_4, e_7\}$ 为极大匹配, 同时也都是最大匹配, $\beta_1 = 2$.

定义 2.3. 设 M 为图 $G = \langle V, E \rangle$ 的一个匹配,

- 称 M 中的边为**匹配边**, 不在 M 中的边为**非匹配边**.
- 与匹配边相关联的顶点为**饱和点**, 不与匹配边相关联的顶点为**非饱和点**.
- 若 G 中每个顶点都是饱和点, 则称 M 为 G 的**完美匹配**.
- G 中由匹配边和非匹配边交替构成的路径 (圈) 称作**交错路径 (交错圈)**.
- 起点和终点都是非饱和点的交错路径称作**可增广的交错路径**.

- 饱和点 saturated vertex 又称**匹配点** matched vertex.
- M 为 G 的完美匹配当且仅当 G 中的每个顶点都是饱和点.
- 给定匹配 M , G 中饱和点数为 $2|M|$, 非饱和点数为 $n - 2|M|$.
- 可增广交错路径的起始边均为非匹配边, 非匹配边的数量比匹配边的数量多 1.

例子 2.3.



(a) $M = \{e_1, e_4, e_7\}$ 为完美匹配，也是最小边覆盖.

(b) $M = \{e_2, e_4\}$ 是最大匹配，但不是完美匹配，最右边的顶点是非饱和点，添加一条覆盖这个顶点的边， $M \cup \{e_i\}, i = 6, 7, 8$ 都是图的最小边覆盖.

定理 2.1. 设 n 阶图 G 中无孤立点,

1. 设 M 为 G 的一个最大匹配, 对 G 中每个 M -非饱和点均取一条与其关联的边, 组成边集 N , 则 $W = M \cup N$ 为 G 的最小边覆盖.
2. 设 W_1 为 G 的一个最小边覆盖, 若 W_1 中存在相邻的边就移去其中的一条, 该移去的边集为 N_1 , 则 $M_1 = W_1 - N_1$ 为 G 的最大匹配.
3. G 的边覆盖数 α_1 与匹配数 β_1 满足: $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

证明. 因为 M 为最大匹配, $|M| = \beta_1$, 所以 G 有 $n - 2\beta_1$ 个 M -非饱和点. 根据加边过程, 每个非饱和点均对应 N 中一条边, 同时 N 中每条边均对应唯一一个非饱和点 (为什么?), 即 $|N| = n - 2\beta_1$. 又 $W = M \cup N$, 故

$$|W| = |M| + |N| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1. \quad (1)$$

由构造过程可知 M_1 是 G 的一个匹配, 因此所得图中共有 $n - 2|M_1|$ 个非饱和点. 由 W_1 是最小边覆盖可知, 对 W_1 中任意相邻两边 $\{u, v_1\}, \{u, v_2\}$, 其三个顶点 u, v_1, v_2 在 $G[W_1]$ 中一定呈 V 字型 (u 同时关联两边, v_1, v_2 为悬挂点), 因而每移去相邻两条边中的一条时, 会产生并仅产生一个 M_1 -非饱和点, 因此所去除边数 $|N_1|$ 等于所得非饱和点数 $n - 2|M_1|$. 又 $N_1 = W_1 - M_1$, 故

$$|W_1| - |M_1| = |N_1| = n - 2|M_1| \implies n - |M_1| = |W_1| = \alpha_1. \quad (2)$$

又因为 M_1 是匹配, W 是边覆盖, 有 $|M_1| \leq \beta_1, |W| \geq \alpha_1$. 于是

$$\alpha_1 \stackrel{\text{Eq. 2}}{=} n - |M_1| \geq n - \beta_1 \stackrel{\text{Eq. 1}}{=} |W| \geq \alpha_1.$$

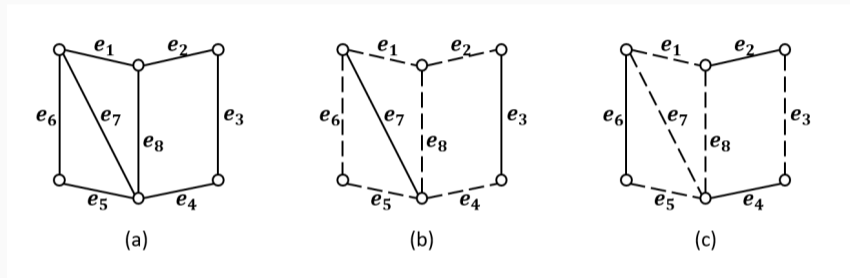
因而上述各项均相等, 故有 $|M_1| = \beta_1, |W| = \alpha_1, \alpha_1 + \beta_1 = n$.

推论 2.1. 设图 G 无孤立点, M 是 G 的一个匹配, W 是 G 的一个边覆盖, 则 $|M| \leq |W|$, 且当等号成立时, M 是 G 的完美匹配, W 是 G 的最小边覆盖.

证明. 由定理 2.1-(1) 知最大匹配为最小边覆盖的子集, 故 $\beta_1 \leq \alpha_1$. 又由匹配与边覆盖的定义知 $|M| \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \leq |W|$. 若等号成立, 则 $(|M| = \beta_1)$ M 是最大匹配, $(|W| = \alpha_1)$ W 是最小边覆盖, 再由定理 2.1-(3) 及 $\alpha_1 = \beta_1$ 有 $n = \alpha_1 + \beta_1 = 2\beta_1$, 从而 G 中 M -非饱和点数 $n - 2\beta_1 = 0$, 故 M 是完美匹配.

实例

例子 2.4.



- 图 (b) 中 $M_1 = \{e_3, e_7\}$ 是图 (a) 的一个匹配, 但不是最大匹配.
- $P = e_2e_3e_4e_7e_6$ 是关于 M_1 的可增广的交错路径.
- 将 P 中的匹配边变成非匹配边, 非匹配边变成匹配边, 得到匹配 $M_2 = \{e_2, e_4, e_6\}$.

定理 2.2. 设 M 是图 G 的一个匹配, 则 M 为 G 的最大匹配当且仅当 G 中不含关于 M 的可增广的交错路径.

证明. (\Rightarrow) 设 M 为 G 中最大匹配, 若 G 中存在关于 M 的可增广的交错路径 P , 在 P 中匹配边比非匹配边少 1, 将 P 中的非匹配边变成匹配边, 匹配边变成非匹配边得到 M' . 则 M' 是比 M 多一条边的匹配, 这与 M 是最大匹配相矛盾, 所以 M 不含可增广的交错路径.

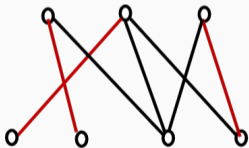
(\Leftarrow) 设 G 中不含关于 M 的可增广交错路径, M_1 是 G 的最大匹配. 若 $M = M_1$, 则证毕; 否则, 考虑 M_1 和 M 对称差的导出子图 $H \triangleq G[M_1 \oplus M]$. 由于 M_1 和 M 都是匹配, 所以 H 各连通分支的构成分以下两种情况: ① 要么是由 M 和 M_1 组成的交错圈 C , 且在 C 上 M 和 M_1 中的边数相等; ② 要么为由 M 和 M_1 中的边组成的交错路径 P , 而 G 中均不含关于 M (已知条件) 和 M_1 (最大匹配) 的可增广交错路径, 故在 P 上 M 和 M_1 的边数相同 (不然, P 必为二者之一的可增广交错路径). 综上所述, M 与 M_1 的边数都相同.

二分图中的匹配

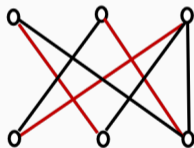
最大匹配

定义 3.1. 设 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二分图且 $|V_1| \leq |V_2|$, M 是 G 的一个匹配且 $|M| = |V_1|$, 则称 M 是 V_1 到 V_2 的**完备匹配**.

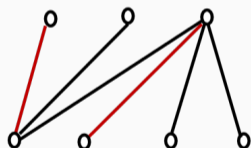
- 当 $|V_2| = |V_1|$ 时, 二分图的完备匹配是完美匹配.
- M 为二分图的完备匹配当且仅当 V_1 或 V_2 中的每个顶点都是饱和点.
- 二分图的完备匹配为最大匹配, 但最大匹配不一定是完备匹配.



完备匹配



完美匹配



最大匹配

Hall 定理

定理 3.1 (Hall 定理). 设二分图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle, |V_1| \leq |V_2|$, 则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配 $\iff V_1$ 中任意 k ($1 \leq k \leq |V_1|$) 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻 (相异性条件).

证明. (\Leftarrow) 设 M 为 G 的最大匹配, 若 M 不是完备匹配, 则存在非饱和点 $v_x \in V_1$. 于是根据相异性条件, 存在 $e \in E - M$ 与 v_x 关联. 又 M 是最大匹配, 故 V_2 中与 v_x 相邻的顶点都是饱和点. 考虑从 v_x 出发的尽可能长的所有交错路径集合 \mathcal{P} , 这些交错路径都不可增广. 因此每条交错路径, 一定始于非匹配边, 终于匹配边, 故除 v_x 外, 路径上的顶点都与一条匹配边关联, 即均为饱和点. 令

$$S = \{v \mid v \in V_1 \wedge (\exists P \in \mathcal{P} \text{ s.t. } v \text{ is on } P)\},$$

$$T = \{v \mid v \in V_2 \wedge (\exists P \in \mathcal{P} \text{ s.t. } v \text{ is on } P)\}.$$

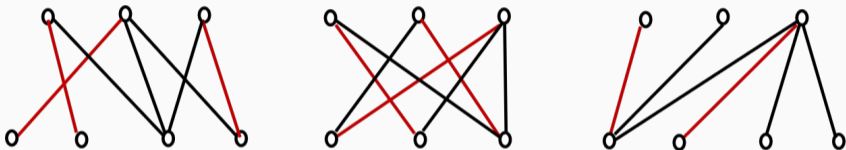
除 v_x 外, S 和 T 中的顶点都是饱和点, 且 S 中每个顶点与 T 中每个顶点通过一条匹配边一一对应, 因而 $|S| = |T| + 1$. 故 V_1 中有 $|T| + 1$ 个顶点只与 V_2 中的 $|T|$ 个顶点相邻, 与相异性条件矛盾.

定理 3.2. 设二分图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, 如果存在 t 使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配.

证明. V_1 中任意 k ($1 \leq k \leq |V_1|$) 个顶点至少关联 kt 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 这 kt 条边至少关联 V_2 中 k 个顶点. G 满足相异性条件.

- 定理中的条件被称为 t 条件.

例子 3.1.

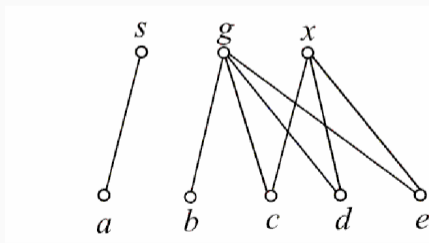


- 前两个图满足相异性条件，第 3 个不满足.
- 第 2 个图不满足 t 条件，但有完备匹配.

例子

例子 3.2. 某课题组要从 a, b, c, d, e 5 人中派 3 人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 a 只想去上海, b 只想去广州, c, d, e 都表示想去广州或香港. 该课题组在满足个人要求的条件下三个城市均需有人到访, 如何进行派遣?

令 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, $V_1 = \{s, g, x\}$, 其元素分别表示上海、广州和香港. $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{\{u, v\} | u \in V_1, v \in V_2, v \text{ 想去 } u\}$. 每个 V_1 到 V_2 的完备匹配给出一个派遣方案. 如 a 到上海, b 到广州, c 到香港.

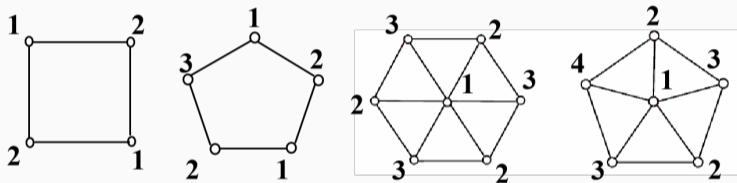


点着色与边着色

定义 4.1. 设无向图 G 无环,

- 对 G 的每个顶点涂一种颜色, 使相邻的顶点涂不同的颜色, 称为图 G 的一种**点着色**, 简称**着色**.
- 若能用 k 种颜色给 G 的顶点着色, 则称 G 是 **k -可着色的**.
- 若 G 是 k -可着色的, 但不是 $k-1$ -可着色的, 则称 G 的**色数** chromatic number 为 k .
- G 的色数记作 $\chi(G)$, 简记为 χ .

例子 4.1. 求如下各图色数.



- 偶圈用 2 种颜色, 奇圈用 3 种. 奇阶轮图用 3 种, 偶阶轮图用 4 种.
- G 是 2-可着色的当且仅当 G 是二分图.

定理 4.1. 对于任意的无环图 G , 均有

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

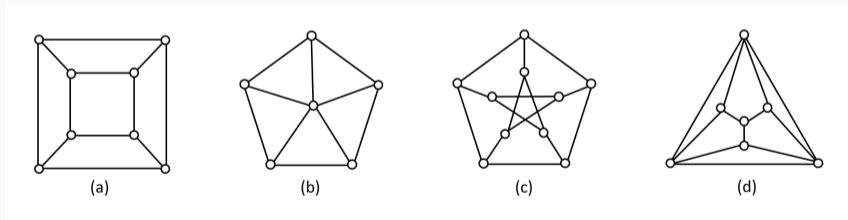
证明. 对 G 的阶数 n 作归纳证明. 当 $n = 1$ 时, 结论显然为真.

设 $n = k$ ($k \geq 1$) 时结论成立. 现考虑 $n = k + 1$ 的情况. 在图 G 中取 G 的一个顶点 v_0 , 令 $G' = G - v_0$, G' 的阶数为 k . 由归纳假设, 可用 $\Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ 种颜色给 G' 的顶点着色. 而 v_0 至多与 n 的 $\Delta(G)$ 个顶点相邻, 在 G' 的点着色中, 这些顶点至多用 $\Delta(G)$ 种颜色. 因此在这 $\Delta(G) + 1$ 种颜色中至少存在一种颜色可以给 v_0 着色, 使 v_0 与相邻顶点不同颜色. 得证当 $n = k + 1$ 时结论也成立.

定理 4.2 (*Brooks 定理*). 设无环图 G 不是完全图 K_n ($n \geq 3$), 也不是奇圈, 则

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

例子 4.2. 计算如下各图的色数.



定义 4.2 (地图着色).

- 连通无桥平面图的一个平面嵌入称作地图.
- 若两个国家有公共的边界, 则称这两个国家是相邻的.
- 对地图的每个国家涂上一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色, 称作对地图的**面着色**.
- 若能用 k 种颜色给 G 的面着色, 则称 G 为 **k -可面着色的**.
- 若 G 是 k -可面着色的, 但不是 $k-1$ -面可着色的, 则称 G 的**面色数**为 k .
- G 的面色数记作 $\chi^*(G)$, 简记为 χ^* .

定理 4.3. 地图 G 是 k -可面着色的 \iff 它的对偶图 G^* 是 k -可面着色的.

定理 4.4 (四色定理). 任何平面图都是 4-可着色的.

定义 4.3. 对图 G 的每条边着一种颜色，使相邻的边着不同的颜色，称作对图 G 的**边着色**. 若能用 k 种颜色给 G 的边着色，则称 G 为 **k -可边着色的**. 若 G 为 k -可边着色的，但不是 $(k-1)$ -可边着色的，则称 G 的**边色数** edge chromatic number 为 k . G 的边色数记作 $\chi'(G)$ ，简记作 χ' .

定理 4.5 (Vizing 定理). 简单图的边色数只可能取两个值： Δ 或者 $\Delta + 1$.

定理 4.6. 二分图的边色数等于 Δ .

例子 4.3. 长度大于等于 2 的偶圈的边色数等于 2, 长度大于等于 3 的奇圈的边色数等于 3.

例子 4.4. 证明 $\chi'(W_n) = n - 1$, 其中 $n \geq 4$.

证明. 对 $n = 4, 5$ 容易找到边着色方案使的 $\chi'(W_n) = n - 1$.

当 $n \geq 6$ 时, 中间节点关联的 $n - 1$ 条边可以用 $n - 1$ 种颜色着色; 外圈上的每条边都与 4 条边相邻, 而可用颜色数 $n - 1 \geq 5$, 故可以为其分配颜色使的相邻边颜色不同. 故 $\chi'(W_n) \leq n - 1$, 而 Vizing 定理意味着 $\chi'(W_n) \geq \Delta = n - 1$. 故, $\chi'(W_n) = n - 1$.

例子 4.5. 证明

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的奇数.} \\ n-1, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

作业

习题 18:

- 8, 10, 11, 17, 18.
- 21, 22, 25.
- 32, 34, 35.