欧拉图与哈密顿图

李修成

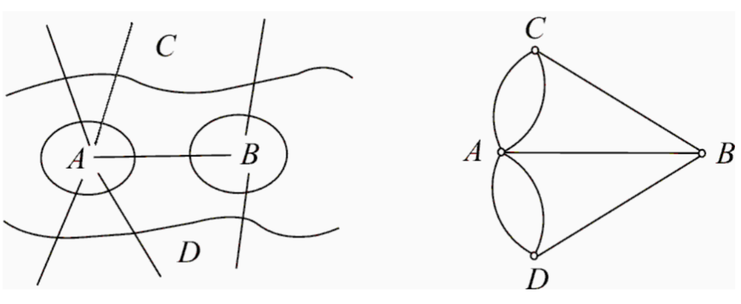
计算机科学与技术学院

Outline

欧拉图

欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题.



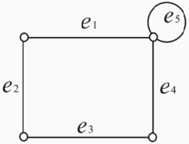
欧拉图定义

定义 *1.1* (欧拉图). 给定图（无向图或有向图）G,

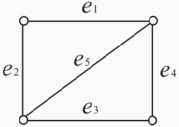
1. 经过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通过称为欧拉通路.
2. 经过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路.
3. 具有欧拉回路的图称为欧拉图.
4. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为半欧拉图.

- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路和欧拉回路都是简单的.
- 环不影响图的欧拉性.

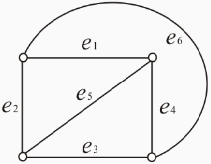
欧拉图实例



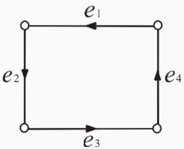
欧拉图



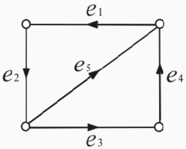
半欧拉图



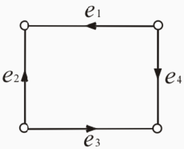
不是



欧拉图



半欧拉图



不是

欧拉图的判别法

定理 ***1.1.*** 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且没有奇度顶点.

证明. $(\Rightarrow)$ 令 G 为欧拉图，则 G 中存在欧拉回路连接了 G 中所有顶点. 由于是回路，对 $v \in V(G)$ 每在回路中出现一次，则必有一条边从 v 进入，同时有另一条边从 v 离开，从而使的 v 的度数加 2，故 v 的度数为偶数.

$(\Leftarrow)$ 令 G 是连通的且没有奇度顶点的无向图，边数为 m. 现对 m 进行归纳证明.

欧拉图的判别法

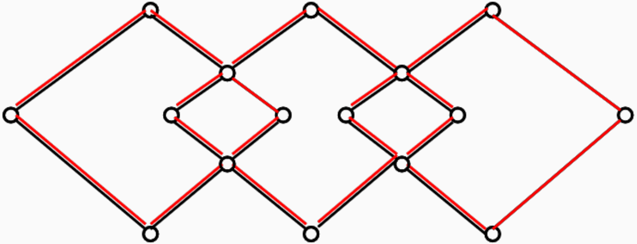
(1) $m = 1$ 时，由 G 为连通且无奇度顶点可知，G 为环，故为欧拉图.

(2) 假设 $m = k\ (k \geq 1)$ 时结论成立，考虑 $m = k+1$. 现从任意顶点出发，通过扩大路径法构造极大路径 $P = v_0v_1 \dots v_\ell$，由于 $v_0v_1 \in E(G)$ 且 G 无奇度顶点故 $d(v_0) \geq 2$，又 v_0 为极大路径起点，故 v_0 在 P 中还存在另一邻居 v_i, $2 \leq i \leq \ell$, 即 G 中存在长度大于等于 2 的圈，记为 $C = v_0v_1 \dots v_i$.

(3) 现将 C 中的边从 G 中全部删除，得到 s 个连通分量 $G_1, \dots, G_s\ (s \geq 1)$, 则每个连通分量至多有 k 条边且顶点度数均为偶数（C 为圈，其为每个顶点贡献的度数均为偶数）. 由归纳假设知，G_i 中存在欧拉回路，记为 C_i, $1 \leq i \leq s$. 由 G 为连通图可知，每个 C_i 均与 C 都至少有一个公共顶点.

(4) 对 G 中顶点重新编号，使的 C 与 C_i 的公共顶点编号为 v_i (若有多个则任选一个), $1 \leq i \leq s$. 现以如下方式构造 G 中的欧拉回路，从 C 中任意顶点 v 出发遍历 C 中顶点，若遇到 v_i 则沿着 C_i 行走再回到 v_i，最后回到 v.

欧拉图的判别法



- 定理 1.1 的证明过程是构造性证明，它直接给出了寻找欧拉图中欧拉回路的算法.
- 同时可从该证明过程直接得出如下推论.

推论 *1.1.* G 是非平凡的欧拉图当且仅当 G 是连通的且是若干个边不重的圈的并.

欧拉图的判别法

定理 ***1.2.*** 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点.

证明. $(\Rightarrow)$ 令 G 为半欧拉图，则 G 中存在欧拉通路，且通路的起点和终点不同. $\forall v \in V(G)$, v 均出现在欧拉通路中. 若 v 以起点和终点出现，则其度数加 1，否则其度数加 2，因此起点和终点的度数为奇数，其余顶点度数均为偶数.

$(\Leftarrow)$ 令 G 是连通的且恰有两个奇度顶点 u, v. 现添加新边 $\{u, v\}$ 得到图 G'. 从而 G' 为欧拉图，存在欧拉回路 C. 现从 C 中删除 $\{u, v\}$ 可得 G 中欧拉通路 $C - \{u, v\}$. 由于 G 中存在奇度顶点，定理 1.1 意味其不是欧拉图，故为半欧拉图.

欧拉图的判别法

定理 *1.3.* 有向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是强连通的且每个顶点的入度等于出度.

定理 *1.4.* 有向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是单向连通的且恰有两个奇度顶点, 其中一个顶点的入度比出度大 1, 另一个顶点出度比入度大 1, 其余顶点的入度等于出度.

- 证明思路同定理 1.1 和定理 1.2.
- 只需在讨论欧拉通路（回路）中顶点的度数时区分入度和出度.
- 若为通路起点，则出度加 1，若为通路终点则入度加 1，否则入度和出度同时加 1.
- 由以上定理可知，一个图不可能既为欧拉图也为半欧拉图.

例子 *1.1.* 设 G 是非平凡的欧拉图，则 $\lambda(G) \geq 2$.

证明*.* 只需证明 G 的任意一条边 e 都不是桥. 设 C 是一条欧拉回路，e 在 C 上，因而 $G-e$ 仍是连通的，故 e 不是桥.

Fleury 算法

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0, i = 0$.

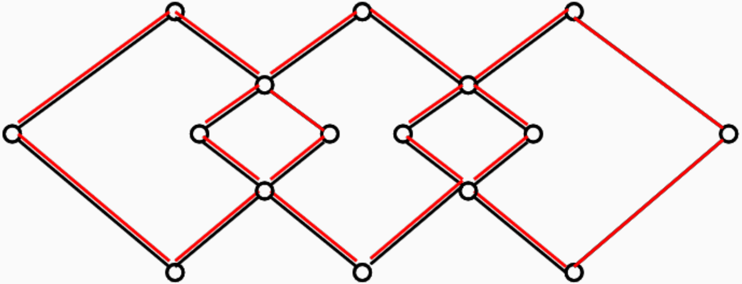
(2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_i v_i$,
如果 $E(G) - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边, 则计算结束; 否则按下面方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中选取 e_{i+1}:
   (a) e_{i+1} 与 v_i 关联;
   (b) 除非无别的边可供选择, 否则 e_{i+1} 不应为 $G - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中的桥.

   设 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$, 把 $e_{i+1} v_{i+1}$ 加入 P_i.

(3) 令 $i = i + 1$, 返回 (2).

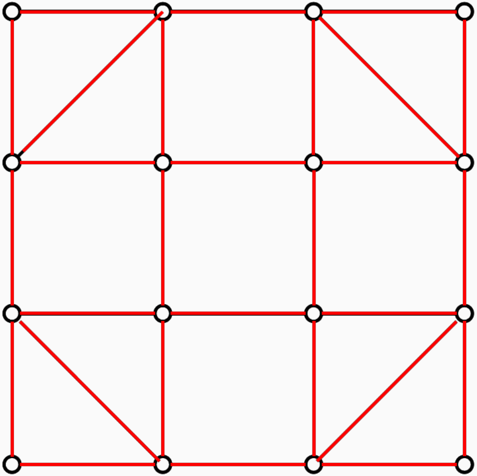
实例

一笔画出一条欧拉回路



实例

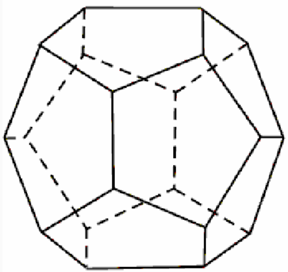
一笔画出一条欧拉回路



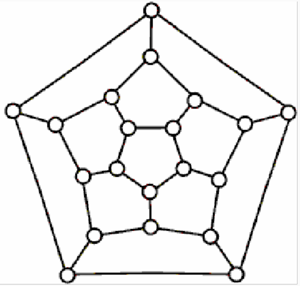
哈密顿图

哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题.



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

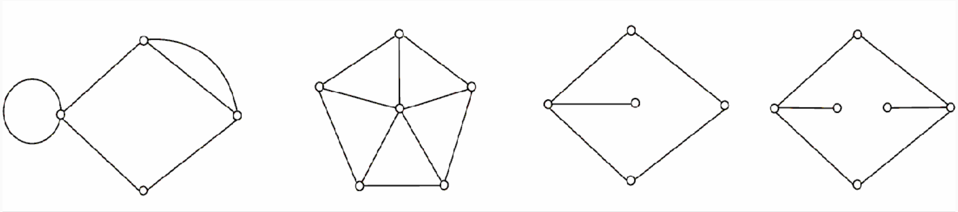
定义 *2.1.* 给定图 G,

1. 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路.
2. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路.
3. 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图.
4. 具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图称作半哈密顿图.

- 规定平凡图为哈密顿图.
- 哈密顿通路和哈密顿回路均为初级的.
- 环与平行边不影响图的哈密顿性.

哈密顿图与半哈密顿图

例子 ***2.1.***



哈密顿图　　哈密顿图　　半哈密顿图　　不是

哈密顿图判定的必要条件

定理 *2.1.* 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$，均有 $p(G - V_1) \leq |V_1|$.

证明. 设 C 为 G 中一条哈密顿回路

- $p(G - V_1) \leq p(C - V_1)$ (C 为 G 的生成子图，G 的连通性更强),
- $p(C - V_1) \leq |V_1|$ (V_1 中顶点均不相邻时左侧取得上界),

故 $p(G - V_1) \leq |V_1|$.

推论 *2.1.* 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$，均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1.$$

证明. 设 P 为从 u 到 v 的哈密顿通路，令 $G' = G \cup \{u, v\}$，则 G' 为哈密顿图. 于是

$$p(G - V_1) = p(G' - V_1 - \{u, v\}) \leq p(G' - V_1) + 1 \leq |V_1| + 1.$$

哈密顿图判定的必要条件

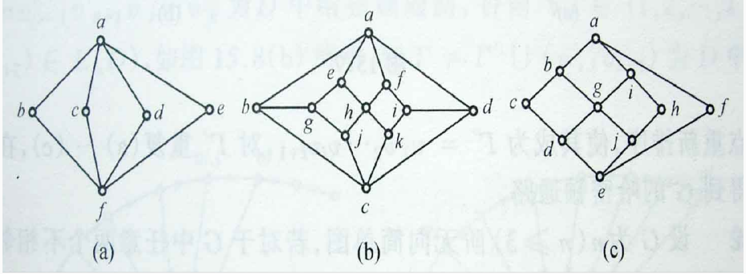
例子 2.2. 设 G 为 n 阶无向连通简单图，若 G 中有割点或桥，则 G 不是哈密顿图.

证明. 设 v 为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$.

K_2 有桥，故不是哈密顿图.

哈密顿图判定的必要条件

例子 2.3. 判断下面的图是不是哈密顿图, 是不是半哈密顿图.



(a) 取 $V_1 = \{a, f\}$, $p(G - V_1) = |\{b, c, d, e\}| = 4 > |V_1| = 2$, 非哈密顿图，非半哈密顿图.

(b) 取 $V_1 = \{a, g, h, i, c\}$,$p(G - V_1) = |\{b, e, f, j, k, d\}| = 6 > |V_1| = 5$, 非哈密顿图. 而 $b\ a\ e\ g\ j\ c\ k\ h\ f\ i\ d$ 是一条哈密顿通路，故 G 是半哈密顿图.

(c) $a\ b\ c\ d\ g\ i\ h\ j\ e\ f\ a$ 是一条哈密顿回路，故 G 是哈密顿图.

哈密顿图判定的必要条件

对于二分图 $G = \langle V_1, V_2, E\rangle$, $2 \le |V_1| \le |V_2|$. 由定理 2.1 可知

(1) 若 G 是哈密顿图，则 $|V_1| = |V_2|$.

(2) 若 G 是半哈密顿图，则 $|V_2| = |V_1| + 1$ 或 $|V_2| = |V_1|$.

(3) 若 $|V_2| \ge |V_1| + 2$，则 G 既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

(1) $|V_2| = p(G - V_1) \le |V_1|$.

(2) $|V_1| \le |V_2| = p(G - V_1) \le |V_1| + 1$.

哈密顿图判定的充分条件

定理 2.2. 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 u, v，均有

$$d(u) + d(v) \geq n - 1 \tag{1}$$

则 G 中存在哈密顿通路.

证明. 先证 G 是连通图. 否则 G 至少有两个连通分支，记为 G_1, G_2，阶数分别为 n_1, n_2. 任取 $u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$. 由 G 为简单图可知 $d_{G_1}(u) \leq n_1 - 1$, $d_{G_2}(u) \leq n_2 - 1$. 故

$$d(u) + d(v) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(u) \leq n_1 - 1 + n_2 - 1 \leq n - 2,$$

与 Eq. 1 矛盾. 故 G 是连通图.

再证 G 中存在哈密顿通路. 令 $P = v_1 v_2 \ldots v_\ell$ 为 G 中一条极大路径（起点与终点不与 P 以外顶点相邻），其中 $\ell \leq n$. 若 $\ell = n$ 则 P 为 G 中的哈密顿通路，定理成立；否则，$\ell < n$，即 G 中存在 P 以外的顶点，**现证 G 中存在过 P 上所有顶点的圈且可扩展**.

哈密顿图判定的充分条件

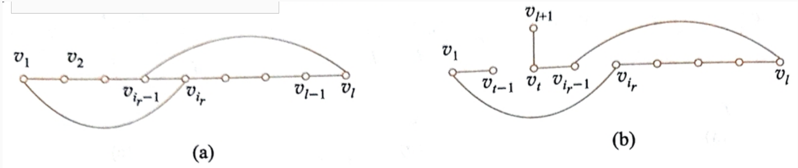
(1) 若 v_1 与 v_ℓ 相邻，即 $\{v_1, v_\ell\} \in E(G)$，则 $P \cup \{v_1, v_\ell\}$ 为满足要求的圈.

(2) 若 v_1 与 v_ℓ 不相邻，令 v_1 在 P 上的邻居为 $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ $(v_{i_1} = v_2)$，则 $k \geq 2$，否则 $d(v_1) = 1$，又 $d(v_\ell) \leq \ell - 2$，故 $d(v_1) + d(v_\ell) \leq 1 + \ell - 2 < n - 1$ 与 Eq. 1 矛盾. 而 v_ℓ 至少与 $v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \ldots, v_{i_k-1}$ 之一相邻，否则 $d(v_\ell) \leq \ell - 2 - (k-1)$，从而

$$d(v_1) + d(v_\ell) \leq k + \ell - 2 - (k-1) = \ell - 1 < n - 1$$

与 Eq. 1 矛盾. 设 v_ℓ 与 v_{i_r-1} 相邻，**则圈** $C = v_1 v_2 \ldots v_{i_r-1} v_\ell v_{\ell-1} \ldots v_{i_r} v_1$ **过 P 上所有点**. 如图-(a) 所示.

(3) 由 G 连通性可知，存在 $v_{\ell+1} \in V(G) - C$ 与 C 上顶点 v_t 相邻，当 $t < i_r - 1$ 时，可用图-(b) 所示方式扩展，其他类似. 重复 (1)-(3) 可在有限步内得到 G 的一条哈密顿通路.



推论 2.2. 设 G 为 $n\,(n \geq 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u, v, 均有

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

则 G 中存在哈密顿回路.

证明. 由定理 2.2 知，G 中存在哈密顿通路，设 $P = v_1 v_2 \ldots v_n$ 为 G 中的一条哈密顿通路. 若 v_1 与 v_n 相邻，则 $P \cup \{v_1, v_n\}$ 为 G 中的哈密顿回路；否则，应用定理 2.2 证明过程中 (2) 的思路，可得过 P 上各点的圈，即 G 中的哈密顿回路.

推论 2.3. 完全图 $K_n\,(n \geq 3)$ 是哈密顿图.

证明. 任取两个顶点 u, v 均有 $d(u) + d(v) = 2(n-1) \geq n$.

哈密顿图判定的充分条件

定理 ***2.3.*** 设 G 是 n 阶无向简单图，若存在不相邻的顶点 u, v 有 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup \{u, v\}$ 为哈密顿图.

证明*.* 留作作业.

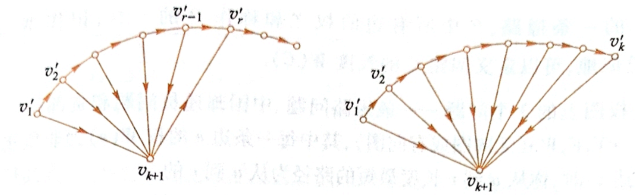
定理 2.4. $n\,(n \geq 2)$ 阶竞赛图中存在哈密顿通路.

证明. 使用归纳法进行证明. $n=2$ 时，$G=K_2$ 结论成立.

假设结论对 $n=k\ (k\geq 2)$ 成立. 现证结论对 $n=k+1$ 成立. 令 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_{k+1}\}$, $G'=G-\{v_{k+1}\}$. 由归纳假设知，G' 中存在哈密顿通路 $P=v_1'v_2'\ldots v_k'$. 下面证明 v_{k+1} 可以扩展至 P 中.

(a) 若存在 $v_r'\ (1\leq r\leq k)$ 使的 $\forall i\in\{1,\ldots,r-1\}$ 有 $\langle v_i', v_{k+1}\rangle\in E(G)$ 且 $\langle v_{k+1}', v_r\rangle\in E(G)$，则 $v_1'v_2'\ldots v_{r-1}'v_{k+1}v_r'v_{r+1}'\ldots v_k'$ 为 G 中哈密顿通路（若 $r=1$ 则 $v_1'v_2'\ldots v_{r-1}'$ 为空）;

(b) 否则 $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$ 均有 $\langle v_i', v_{k+1}\rangle\in E(G)$，则 $v_1'v_2'\ldots v_k'v_{k+1}$ 为 G 中哈密顿通路.



(a) (b)

哈密顿图的判定

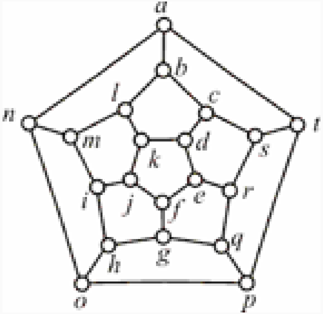
哈密顿图与半哈密顿图的判定问题至今还是一个难题，常用的方法有：

(1) 观察出一条哈密顿回路或哈密顿通路.

(2) 证明满足充分条件.

(3) 证明不满足必要条件.

例子 *2.4.* 右图是否为哈密顿图（周游世界问题）.
由于 $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,q\,r\,s\,t\,a$ 是一条哈密顿回路，故右图为哈密顿图.
但此图不满足定理 2.2 推论的条件.



最短路径问题

定义 3.1. 设图 $G=\langle V,E\rangle$ 无向图或有向图, 对 G 的每一条边 e, 给定一个数 $W(e)$, 称作边 e 的权重 weight. 把这样的图称为带权图 weighted graph, 记作 $G=\langle V,E,W\rangle$. 当 $e=\{u,v\}$ 或 $\langle u,v\rangle$ 时, 把 $W(e)$ 记作 $W(u,v)$.

设 P 是 G 中的一条通路, P 中所有边的权之和称为 P 的长度, 记作 $W(P)$. 类似地, 可定义回路 C 的长度 $W(C)$.

定义 3.2. 设带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 无向图或有向图, 其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数. $\forall u,v\in V$, 当 u 和 v 连通或可达时, 称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的最短路径, 称其长度为从 u 到 v 的距离, 记作 $d(u,v)$. 约定: $d(u,u)=0$; 当 u 和 v 不连通 (u 不可达 v) 时, $d(u,v)=+\infty$.

定义 3.3 (最短路问题). 给定带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 及顶点 u 和 v, 其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数, 求从 u 到 v 的最短路径.

Dijkstra 算法

如果 $sv_1v_2\dots v_kt$ 是一条从 s 到 t 的最短路径，则 $sv_1v_2\dots v_i$ 是从 s 至 v_i 的最短路径, 其中 $1\leq i\leq k$.

- Dijkstra 算法从始点 s 开始逐步向外扩展顶点集合.
- 通过动态维护一个顶点集合 S，表示已经得到最短路径的顶点，S 初始化为 $\{\}$.
- 为每个顶点维护一个距离 $L(v)$ 表示至当前步从 s 经 S 中的顶点到达 v 的最短路径.
- 算法每次从 $V-S$ 中选择一个 $L(v)$ 值最小的顶点 u 加入 S;
- 并且在下一步以 u 为中心向外扩展，检查经 u 是否可以减小每个 $L(v), v\in V-S$.

Dijkstra 算法

Algorithm 1: Dijkstra Algorithm

Input: The weighted graph G.

Output: The shortest distance from source s to each vertice v, $L(v)$.

$S \leftarrow \{\}$, $L(s) \leftarrow 0$;
for $v \in V - \{s\}$ **do**
  $L(v) \leftarrow \infty$;
while $S \neq V$ **do**
  $u \leftarrow \underset{v}{\operatorname{argmin}} \{L(v) \mid v \in V - S\}$, $S \leftarrow S \cup \{u\}$;
  for $\langle u, v \rangle \in E$ **do**
    if $L(u) + W(u, v) < L(v)$ **then**
      $L(v) \leftarrow L(u) + W(u, v)$;
return L;

Dijkstra 算法

Algorithm 2: Dijkstra Algorithm with tracking

Input: The weighted graph G.

Output: The shortest distance from source s to each vertice v, $L(v)$.

$S \leftarrow \{\}, L(s) \leftarrow 0;$

for $v \in V - \{s\}$ **do**

  $L(v) \leftarrow \infty, P(v) \leftarrow \text{nil};$

while $S \neq V$ **do**

  $u \leftarrow \operatorname*{argmin}_v \{L(v) \mid v \in V - S\}, S \leftarrow S \cup \{u\};$

  for $\langle u, v \rangle \in E$ **do**

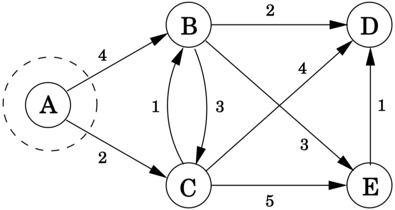
    if $L(u) + W(u, v) < L(v)$ **then**

      $L(v) \leftarrow L(u) + W(u, v), P(v) \leftarrow u;$

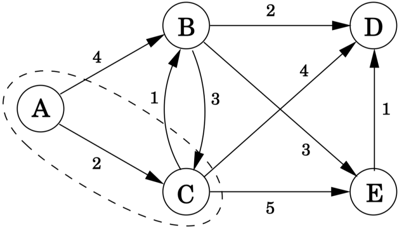
return $L;$

For each u, $d(s, u) = L(u)$, and we can find the shortest path from s to u by tracking $P(u)$.

例子

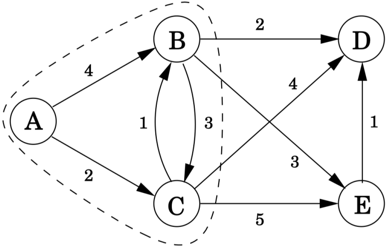


A: 0	D: ∞
B: 4	E: ∞
C: 2	

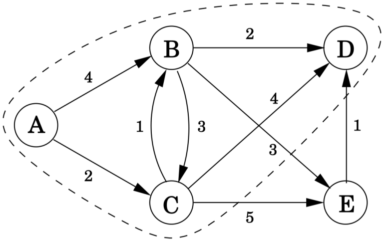


A: 0	D: 6
B: 3	E: 7
C: 2	

例子

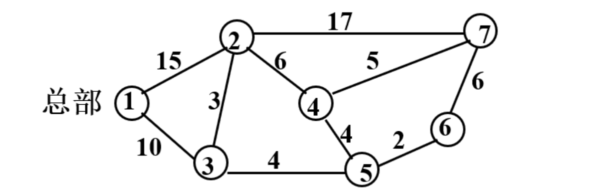


A: 0	D: 5
B: 3	E: 6
C: 2	



A: 0	D: 5
B: 3	E: 6
C: 2	

例子 3.1. 一个总部和 6 个工地, 求从总部到各工地的最短路径.



Dijkstra 算法

Algorithm 2: Dijkstra Algorithm

Input: The weighted graph G.

Output: The shortest distance from source s to each vertice v, $L(v)$.

$S \leftarrow \{\}$, $L(s) \leftarrow 0$;
for $v \in V - \{s\}$ **do**
  $L(v) \leftarrow \infty$;
while $S \neq V$ **do**
  $u \leftarrow \operatorname*{argmin}_{v} \{L(v) \mid v \in V - S\}$, $S \leftarrow S \cup \{u\}$;
  for $\langle u, v \rangle \in E$ **do**
    if $L(u) + W(u, v) < L(v)$ **then**
      $L(v) \leftarrow L(u) + W(u, v)$;
return L;

Dijkstra 算法优先队列实现

Algorithm 3: Dijkstra Algorithm implemented with priority queue

Input: The weighted graph G.

Output: The shortest distance from source s to each vertice v, $L(v)$.

$L(s) \leftarrow 0$;
for $v \in V - \{s\}$ **do**
    $L(v) \leftarrow \infty$;
$H \leftarrow \mathrm{makequeue}(V)$ (using $L(v)$ as keys);
while H is not empty **do**
    $u \leftarrow \mathrm{deletemin}(H)$;
    for $\langle u, v \rangle \in E$ **do**
        if $L(u) + W(u, v) < L(v)$ **then**
            $L(v) \leftarrow L(u) + W(u, v)$;
            $\mathrm{decreasekey}(H, v)$;
return L;

Dijkstra 算法时间复杂度分析

Implementation	deletemin	decreasekey (insert)	$\|V\|\times$ deletemin $+$ $(\|V\|+\|E\|)\times$ insert
Array	$O(\|V\|)$	$O(1)$	$O\left(\|V\|^2\right)$
Binary heap	$O(\log\|V\|)$	$O(\log\|V\|)$	$O((\|V\|+\|E\|)\log\|V\|)$
Fibonacci heap	$O(\log\|V\|)$	$O(1)$ (amortized)	$O(\|V\|\log\|V\|+\|E\|)$

中国邮递员与旅行商问题

中国邮递员问题

中国邮递员问题： 邮递员从邮局出发，走遍他所负责的街区投递邮件，最后回到邮局. 问：如何走才能使他走的行程最短?

图论方法描述如下：给定一个带权无向图，每条边的权重非负，求经过每一条至少一次的最短回路.

旅行商问题

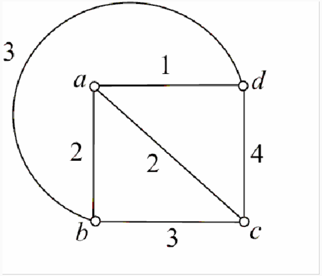
旅行商问题： 有 n 个城市，给定城市之间道路的长度，长度可以为 ∞，对应这两个城市之间无交通线. 旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，如何走才能使他走的行程最短?

图论方法描述如下：设 $G=\langle V,E,W\rangle$ 为一个 n 阶完全带权图 K_n，各边的权非负，且可能为 ∞. 求 G 中的一条最短的哈密顿回路.

K_n 中有多少条不同的哈密顿回路?

例题

例子 *4.1.* 求下面带权图 K_4 中最短哈密顿回路.



不计出发点和方向，$K_n\,(n \geq 3)$ 中有 $(n-1)!/2$ 条不同的哈密顿回路.

$$C_1 = a\ b\ c\ d\ a,\ W(C_1) = 10,$$

$$C_2 = a\ b\ d\ c\ a,\ W(C_2) = 11,$$

$$C_3 = a\ c\ b\ d\ a,\ W(C_3) = 9.$$

Floyd 算法计算最短路径

Algorithm 4: Floyd algorithm

Input: The weighted graph G.

Output: The length of shortest path between any two vertices $[d(v_i, v_j)]_{n\times n}$.

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $d(0, v_i, v_j) \leftarrow w(v_i, v_j)$;

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
            $d(k, v_i, v_j) \leftarrow \min\left(d(k-1, v_i, v_j), d\left(k-1, v_i, v_k\right) + d\left(k-1, v_k, v_j\right)\right)$;

return $[d(n, v_i, v_j)]_{n\times n}$;

$d(k, v_i, v_j)$ 表示允许经过顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_k$，从 v_i 至 v_j 的最短路径.

Floyd 算法计算最短路径

Algorithm 5: Floyd algorithm

Input: The weighted graph G.

Output: The length of shortest path between any two vertices $[d(v_i, v_j)]_{n\times n}$.

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $d(v_i, v_j) \leftarrow w(v_i, v_j)$;

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
            $d(v_i, v_j) \leftarrow \min\left\{d(v_i, v_j), d\left(v_i, v_k\right) + d\left(v_k, v_j\right)\right\}$;

return $[d(v_i, v_j)]_{n\times n}$;

若无需中间计算结果 $d(k, v_i, v_j), k = 1, 2, \ldots, n-1$，可以通过更新 $d(v_i, v_j)$ 降低存储开销.

Warshall 算法计算传递闭包

Algorithm 6: Warshall algorithm

Input: The matrix $\mathbf{M}$ of R.

Output: The matrix $\mathbf{W}$ of transitive closure.

```
W ← M;
for k ← 1 to n do
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            w_ij ← w_ij ∨ (w_ik ∧ w_kj);
return W;
```

习题

习题

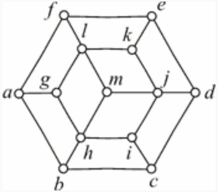
1. 设 G 为 $n(n \geq 2)$ 阶无向欧拉图, 证明 G 中无桥.

证一: 设 C 为 G 中一条欧拉回路, $\forall e \in E(G)$, e 在 C 上, $C - e$ 连通, $G - e$ 也连通, 所以 e 不为桥.

证二: 用反证法. 假设 $e = (u, v)$ 是桥, 则 $G - e$ 产生两个连通分支 G_1, G_2, 不妨设 u 在 G_1 中, v 在 G_2 中. G 中没有奇度顶点, 而删除 e 后, 仅使 u, v 的度数各减 1, 因而 $G_1(G_2)$ 中只含一个奇度顶点, 与任意图中奇度顶点的个数是偶数矛盾.

习题

2. 证明下图不是哈密顿图.



证一: 取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, $p(G - V_1) = 7 \geq 6 = |V_1|$

证二: G 为二部图, $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}, V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$, $|V_1| \neq |V_2|$.

证三: $n = 13$, $m = 21$. h, l, j 为 4 度顶点,a, c, e 为 3 度顶点, 且它们关联不相同的边. 而在哈密顿回路上, 每个顶点关联两条边, 于是可能用于哈密顿回路的边至多有 $21 - (3 \times 2 + 3 \times 1) = 12$. 12 条边不可能构成经过 13 个顶点的回路.

习题

3. 某次国际会议 8 人参加，已知每人至少与其余 7 人中的 4 人能用相同的语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

作无向图 $G = \langle V, E \rangle$，其中 $E = \{(u, v) \mid u, v \in V, u$ 与 v 有能用相同的语言，且 $u \neq v\}$，$V = \{v \mid v$ 为与会者$\}$.

G 为简单图且 $\forall v \in V, d(v) \geq 4$. 于是，$\forall u, v \in V, d(u) + d(v) \geq 8$，故 G 为哈密顿图. 服务员在 G 中找一条哈密顿回路，按回路中相邻关系安排座位即可.

作业

作业

- 15-7, 15-10, 15-13, 15-14.
- 15-18, 15-19, 15-22, 15-23.