图的基本概念

李修成

计算机科学与技术学院

Outline

图

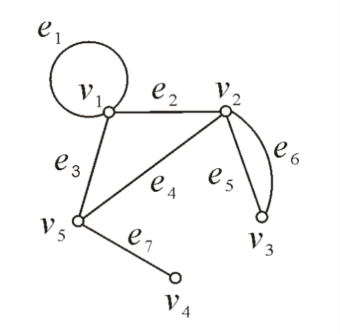
图

定义 *1.1* (无向图). $G = \langle V, E \rangle$，其中

1. V 为非空有穷集合，称为顶点集，其元素为顶点 vertex；
2. E 为边集，每条边 $e \in E$ 有一或两个顶点 $v \in V$ 与其关联，被称其端点 endpoints.

例子 *1.1*. 无向图 $G = \langle V, E \rangle$，其中[a]

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$
$$E = \{\{\{v_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}\}$$



[a] 在数学上通常用 $\{\{1, 1, 2\}\}$ 来表示多重集合 multiset.

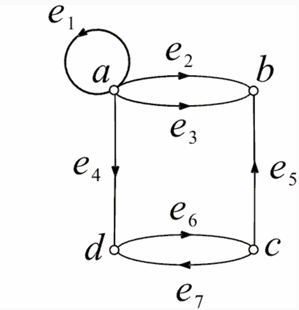
有向图

定义 1.2 (有向图). $G = \langle V, E \rangle$，其中

1. V 为非空有穷集合，称为顶点集，其元素为顶点；
2. E 为 $V \times V$ 的多重有穷子集，称为边集，其元素为有向边，简称边.

例子 1.2. 有向图 $G = \langle V, E \rangle$，其中

$$V = \{a, b, c, d\},$$
$$E = \{\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, d\rangle\}\}$$



图的相关概念和约定

- 无向图和有向图通称图, 给定图 G, 其顶点记为 $V(G)$, 边集记为 $E(G)$.
- 若 $V(G)=n$, 则称 G 为 n 阶图.
- 若 $E(G)=\emptyset$, 则称 G 为零图 null graph; 若同时 $V(G)=n$, 则称 G 为 n 阶零图.
- n 阶零图记作 N_n; N_1 被称为平凡图 trival graph.
- 顶点集为空集的图被称为空图 empty graph, 记为 $\emptyset$.
- 对于图的图形表示，如果给每个顶点和每条边指定一个符号（symbol），则称该表示为标定图 labeled graph，否则为非标定图 unlabeled graph.
- 将有向图各有向边改成无向边后所得的无向图称为原图的基图 base graph.

图的相关概念和约定

令 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，$e = \{u, v\} \in E$,

- 称 u, v 为 e 的端点 endpoints，u, v 是邻接的 adjacent，e 与 u, v 是关联的 incident.
- 若 $u \neq v$，则称 e 与 $u\,(v)$ 的关联次数为 1.
- 若 $u = v$，则称 e 与 u 的关联次数为 2，并称 e 为环 loop.
- 若 $v \in V$ 不与边 $e \in E$ 关联，则称 e 与 v 的关联次数为 0.

令 $G = \langle V, E \rangle$ 为有向图，$e = \langle u, v \rangle \in E$,

- 称 u, v 为 e 的端点 endpoints，u, v 是邻接的 adjacent，e 与 u, v 是关联的 incident.
- u, v 分别为 e 的始点 initial vertex 和终点 terminal vertex.
- 若 $u = v$，则称 e 为环 loop.
- 若两个顶点之间有一条有向边，则称两个顶点相邻.
- 若一条边的终点是另一条边的始点，则称两条边相邻.

图中没有边关联的顶点称为孤立点 isolated vertex.

图的相关概念和约定

令 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图，$\forall v \in V$,

- $N_G(v) = \{u \mid u \in V \land \{u, v\} \in E \land u \neq v\}$ 被称为 v 的邻域 neighbors.
- $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 被称为 v 的闭邻域.
- $I_G(v) = \{e \mid e \in E \land e \text{ is incident to } e\}$ 被称为 v 的关联集 incident set.

令 $G = \langle V, E\rangle$ 为有向图，$\forall u, v \in V$,

- $P_G^+(u) = \{v \mid v \in V \land \langle u, v\rangle \in E \land u \neq v\}$ 被称为 u 的后继元集 successors.
- $P_G^-(v) = \{u \mid u \in V \land \langle u, v\rangle \in E \land u \neq v\}$ 被称为 v 的先驱元集 predecessors.
- $N_G(v) = P_G^+(v) \cup P_G^-(v)$ 被称为 v 的邻域.
- $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 被称为 v 的闭邻域.

多重图与简单图

- 无向图中关联同一对顶点的 2 条和 2 条以上的边称为平行边 parallel edges.
- 有向图中 2 条和 2 条以上始点、终点相同的边称为平行边.
- 平行边的条数称为重数 multiplicity.
- 含平行边的图称为多重图, 不含平行边和环的图称为简单图 simple graph.

顶点的度数

定义 1.3. 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图. $\forall v \in V$, 称以 v 作为边的端点的次数之和为 v 的度数 degree，简称度，记作 $d(v)$.

定义 1.4. 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为有向图. $\forall v \in V$,

- 称以 v 作为边的始点的次数之和为 v 的出度 out-degree，记作 $d^+(v)$;
- 称以 v 作为边的终点的次数之和为 v 的入度 in-degree，记作 $d^-(v)$;
- 称 $d^+(v) + d^-(v)$ 为 v 的度数, 记作 $d(v)$.

- 悬挂顶点: 度数为 1 的顶点.
- 悬挂边: 与悬挂顶点关联的边.
- 偶度（奇度）顶点: 度数为偶数（奇数）的顶点.

顶点的度数

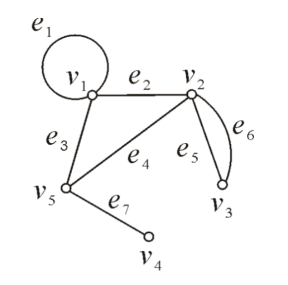
设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, 则有:

- G 的最大度 $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$,
- G 的最小度 $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

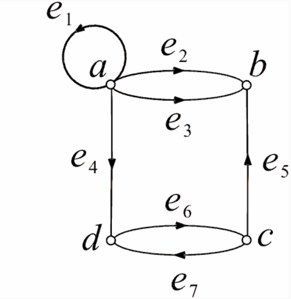
设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, 则有:

- D 的最大出度 $\Delta^{+}(D) = \max\left\{d^{+}(v) \mid v \in V\right\}$,
- D 的最小出度 $\delta^{+}(D) = \min\left\{d^{+}(v) \mid v \in V\right\}$,
- D 的最大入度 $\Delta^{-}(D) = \max\left\{d^{-}(v) \mid v \in V\right\}$,
- D 的最小入度 $\delta^{-}(D) = \min\left\{d^{-}(v) \mid v \in V\right\}$,
- D 的最大度 $\Delta(D) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$,
- D 的最小度 $\delta(D) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

实例



- $d(v_1) = d(v_2) = 4, d(v_3) = 2,$
- $d(v_4) = 1, d(v_5) = 3.$
- $\Delta = 4, \quad \delta = 1.$
- v_4 是悬挂点， e_7 是悬挂边.



- $d^+(a) = 4, d^-(a) = 1, d(a) = 5,$
- $d^+(b) = 0, d^-(b) = 3, d(b) = 3,$
- $d^+(c) = 2, d^-(c) = 1, d(c) = 3,$
- $d^+(d) = 1, d^-(d) = 2, d(d) = 3.$
- $\Delta^+ = 4, \delta^+ = 0, \Delta^- = 3, \delta^- = 1, \Delta = 5, \delta = 3.$

握手定理

定理 *1.1* (握手定理). 在任何无向图中, 所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

证明. 设 G 中每条边（包括环）均有两个端点, 所以在计算 G 中各顶点度数之和时, 每条边均提供 2 度, m 条边共提供 $2m$ 度.

定理 *1.2* (握手定理). 在任何有向图中,

- 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和, 都等于边数;
- 所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

推论 *1.1*. 任何图（无向或有向）中, 奇度顶点的个数是偶数.

证明. 由握手定理, 所有顶点的度数之和是偶数, 而偶度顶点的度数之和是偶数, 故奇度顶点的度数之和也是偶数. 因此，奇度顶点的个数为偶数.

例子 ***1.3.*** 无向图 G 有 16 条边, 3 个 4 度顶点, 4 个 3 度顶点, 其余均为 2 度顶点. 问 G 的阶数 n 的值?

解. 设除 3 度与 4 度顶点外, 还有 x 个顶点, 由握手定理,

$$16 \times 2 = 32 = 3 \times 4 + 4 \times 3 + 2x$$

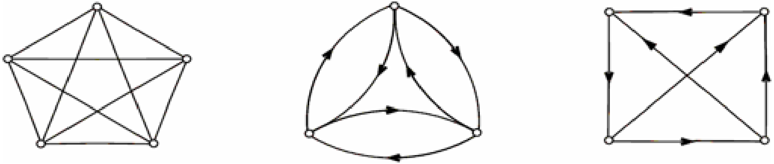
解得 $x = 4$, 阶数 $n = 4 + 4 + 3 = 11$.

定理 ***1.3.*** 设 G 为任意 n 阶无向简单图, 则 $\Delta(G) \leq n - 1$.

定义 *1.5 (*完全图 *complete graph).*

- $n\,(n \geq 1)$ 阶无向完全图: 每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图, 记作 K_n.
  $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n - 1$.
- $n\,(n \geq 1)$ 阶有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反有向边的有向简单图.
  $m = n(n-1)$, $\Delta = \delta = 2(n-1) = 2\Delta^+ = 2\delta^+ = 2\Delta^- = 2\delta^-$.
- $n\,(n \geq 1)$ 阶竞赛图 tournament: 基图为 K_n 的有向简单图. $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n - 1$.

完全图与竞赛图



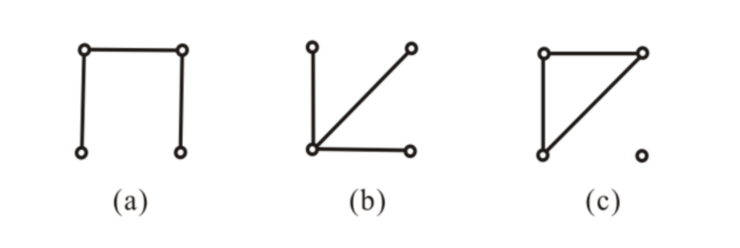
K_5　　3阶有向完全图　　4阶竞赛图

定义 1.6. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图, 令

$$\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E\},$$

称 $\overline{G} = \langle V, \overline{E} \rangle$ 为 G 的补图 complement graph. 若 $G \cong \overline{G}$, 则称 G 是自补图.

例子 1.4 (补图).



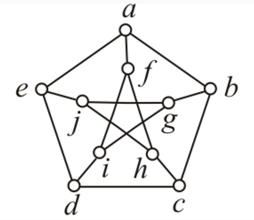
(a) 是自补图, (b) 与 (c) 互为补图.

正则图

定义 *1.7* (*k*-正则图). $\Delta = \delta = k$ 的无向简单图为 k-正则图（k-regular graph），其边数 $m = kn/2$，当 k 是奇数时 n 必为偶数.

例子 *1.5* (正则图).

- n 阶零图是 0-正则图.
- n 阶无向完全图是 $(n-1)$-正则图.
- 彼得松图（Petersen graph）是一个 3-正则图.



Petersen graph

点与边的删除

定义 *1.8.* 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图：

- 若 $e \in E$, 用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e，称为删除边e;
- 又若 $E' \subset E$, 用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边，称为删除 E'.
- 若 $v \in V$, 用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的所有边，称为删除顶点 v;
- 又若 $V' \subset V$, 用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点，称为删除 V'.

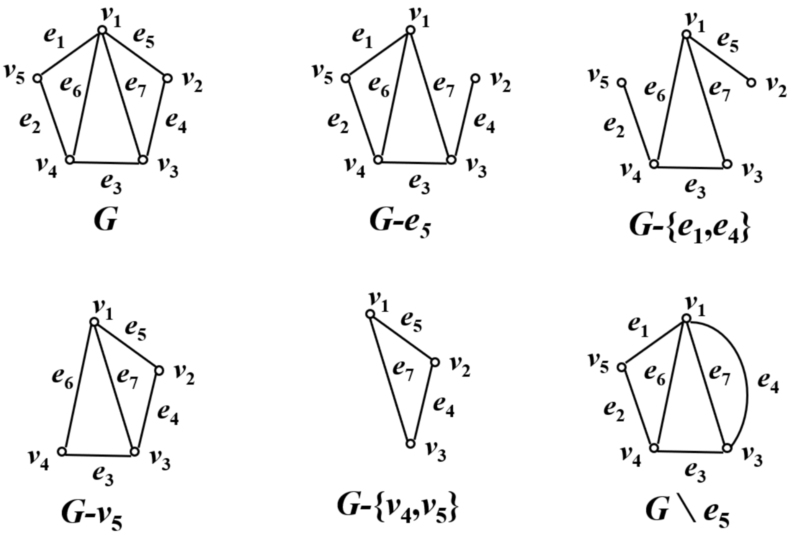
收缩与加新边

定义 *1.9.* 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图:

- 设 $e = \{u, v\} \in E$, 用 $G \setminus e$ 表示从 G 中删除 e 后, 将 e 的两个端点 u, v 用一个新的顶点 w 代替, 并使 w 关联除 e 以外 u, v 关联的所有边, 称作边 e 的收缩 edge contraction.
- 设 $u, v \in V$, 用 $G \cup \{u, v\}$ 表示在 u, v 之间加一条边 $\{u, v\}$, 称为加新边.

在边收缩和加新边过程中可能产生环和平行边.

实例



子图

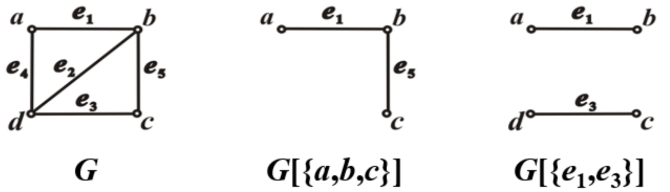
定义 *1.10.* 设两个图 $G = \langle V, E\rangle, G' = \langle V', E'\rangle$, 同为无向图或同为有向图，

- 若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的子图 subgraph，G 为 G' 的母图，记作 $G' \subseteq G$.
- 又若 $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$，则称 G' 为 G 的真子图 proper subgraph.
- 若 $E' \subseteq E$ 且 $V' = V$，则称 G' 为 G 的生成子图 spanning subgraph.

定义 *1.11.* 给定图 $G = \langle V, E\rangle$，

- 若 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, 则以 V_1 为顶点集，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集的图被称为 G 中 V_1 的导出子图 induced subgraph，记作 $G[V_1]$.
- 若 $E_1 \subset E$ 且 $E_1 \neq \varnothing$, 称以 E_1 为边集，以 E_1 中边关联的顶点为顶点集的图被称为 G 中 E_1 的导出子图，记作 $G[E_1]$.

例子 *1.6 (导出子图).*



通路与回路

通路与回路

定义 *2.1.* 设图 $G = \langle V, E \rangle$, G 中顶点与边的交替序列 $P = v_0\, e_1\, v_1\, e_2 \ldots v_{\ell-1}\, e_\ell\, v_\ell$，被称为从 v_0 到 v_ℓ 的通路 walk，其中 v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点，$1 \leq i \leq \ell$. P 中的边数 ℓ 称作它的长度.

- 若 $v_0 = v_\ell$，则称 P 为回路 circuit.
- 一个通路或回路，若所有的边各异，则称为简单通路 trail 或简单回路 closed trail.
- 一个简单通路，若其所有顶点（除 v_0, v_ℓ 外）也各异则称其为初级通路或路径 path.
- 若简单通路有 $v_0 = v_\ell, \ell \geq 3$ 则称其为初级回路或圈 cycle.
- 长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈.
- 若通路或回路中有边重复出现, 则称其为复杂通路或复杂回路.
- 简单图中可以只用顶点序列表示通路（回路），$v_0\, v_1 \ldots v_\ell$.

定理 *2.1.* 在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v（$u \neq v$）存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明. 令 $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{\ell-1} e_\ell v_\ell$（$u = v_0, v = v_\ell$）为从 u 到 v 的通路. 若 $\ell \leq n-1$，则定理成立. 否则，$\ell \geq n$，即通路 P 上的顶点数 $n+1$ 大于 G 中顶点数，故通路上必存在 $0 \leq s < t \leq \ell$ 使的 $v_s = v_t$. 因此，P 上存在从 v_s 到 v_s 长度至少为 1 的回路.

将此回路从 P 中删除后，得到的依然为从 u 到 v 的通路通路，且长度至少减 1. 由于 ℓ 为给定整数，重复此过程至多 $\ell - n + 1$，可得从 u 到 v 长度小于等于 $n-1$ 的通路.

推论 *2.1.* 在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v（$u \neq v$）存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

推论 2.2. 在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

证明. 直接应用定理 2.1，考虑 $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{\ell-2} e_{\ell-1} v_{\ell-1}$.

推论 2.3. 在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身的长度小于等于 n 的初级回路.

图的同构

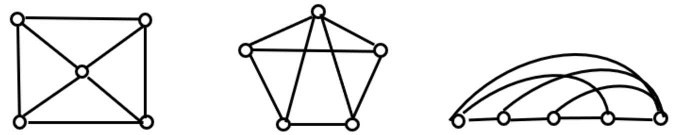
定义 *2.2.* 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为无向图, 若存在双射函数 $f \colon V_1 \mapsto V_2$ 满足

- $\forall \{v_i, v_j\} \in E_1$ 当且仅当 $\{f(v_i), f(v_j)\} \in E_2$
- 且 $\{v_i, v_j\}$ 与 $\{f(v_i), f(v_j)\}$ 的重数相同,

则称 G_1 与 G_2 是同构 isomorphism 的，记作 $G_1 \cong G_2$.

注：上述定义对有向图亦成立，只需将 $\{v_i, v_j\}, \{f(v_i), f(v_j)\}$ 换为 $\langle v_i, v_j \rangle, \langle f(v_i), f(v_j) \rangle$.

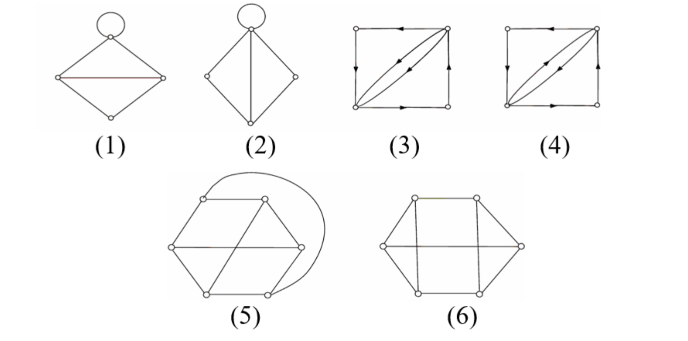
例子 *2.1.*



以上三个图均同构.

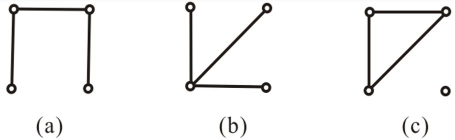
图同构的实例

例子 *2.2.*

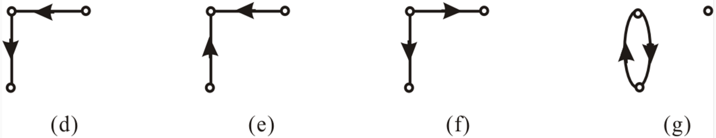


(1) 与 (2), (3) 与 (4), (5) 与 (6) 均不同构.

图同构的实例



所有 4 阶 3 条边非同构的简单无向图.



所有 3 阶 2 条边非同构的简单有向图.

图同构

- 图的同构关系为等价关系.
- 对一般的图，判断两个图同构是个难题，尚不清楚是否存在多项式时间复杂度算法.

图同构的必要条件：

- 节点数目相等.
- 边数相等.
- 度数相同的节点数目相等.

同构和定义意义下的圈

- 长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下给定长度的圈只有一个.
- 在标定图中，只要两个圈的标记序列不同，称这两个圈在定义意义下不同.

例子 *2.3.* 无向完全图 K_n ($n \geq 3$) 中有几种非同构的圈?

解. 长度相同的圈都是同构的. 易知 $K_n(n \geq 3)$ 中含长度 $3, 4, \ldots, n$ 的圈, 共有 $n-2$ 种非同构的圈.

例子 *2.4.* 无向完全图 K_3 的顶点依次标定为 a, b, c. 在定义意义下 K_3 中有多少个不同的长度为 3 的圈?

解. 在定义意义下, 不同起点 (终点) 的圈是不同的, 顶点间排列顺序不同的圈也是不同的, 因而 K_3 中有 $3! = 6$ 个不同的长为 3 的圈: $abca, acba, bacb, bcab, cabc, cbac$.

图的连通性

图的连通性

定义 3.1. 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$，若 $u, v \in V$ 之间存在通路，则称 u, v 是连通的，记作 $u \sim v$.

- 规定 $\forall v \in V$ 有 $v \sim v$.
- $\sim$ 是 V 上的等价关系, 具有自反性, 对称性和传递性.
- 若 G 是平凡图或 G 中任意两个顶点均连通, 则称 G 为连通图, 否则称 G 为非连通图.

定义 3.2. 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$, 若 $V' \subseteq V$ 为顶点连通关系的一个等价类, 则称导出子图 $G[V']$ 为 G 的一个连通分支 connected component. G 的连通分支数记为 $p(G)$.

点割集与边割集

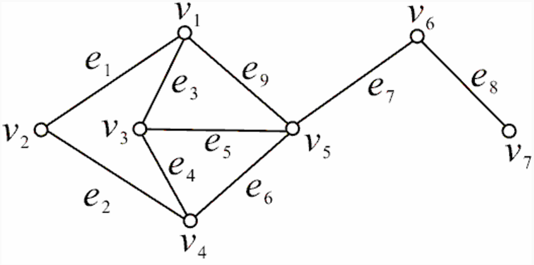
定义 3.3. 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$，若 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$ 且对任意 $V'' \subset V'$，均有 $p(G - V'') = p(G)$，则称 V' 是 G 的点割集 vertex cut. 若 $V' = \{v\}$，则称 v 为割点 cut vertex.

定义 3.4. 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$，若 $E' \subseteq E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$，且对于任意的 $E'' \subset E'$ 均有 $p(G - E'') = p(G)$，则称 E' 是 G 的边割集 edge cut，简称为割集. 若 $E' = \{e\}$，则称 e 为割边 cut edge 或桥 bridge.

注意：

- 上述定义对由若干孤立点构成的图没有定义，其应用场景通常是连通（子）图.
- 在有些图论教材中，若 $V' \subset V$ 使的 $G - V'$ 不连通，则 V' 为点割集.
- 而我们上述的定义被称为最小点割集 minimal vertex cut.
- 边割集类似，这种定义可以扩大可定义图的范围.

例子 *3.1* (点割集与边割集). 计算下图的点割集、边割集、割点、桥.



- $\{v_1, v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}$ 是点割集.
- v_5, v_6 是割点.
- $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3, e_5, e_6\}, \{e_7\}, \{e_8\}$ 等是边割集.
- e_7, e_8 是割边.

定义 3.5. G 为连通非完全图, 称

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 为点割集}\}$$

为 G 的点连通度 vertex connectivity，简称连通度. 对于完全图规定 $\kappa(K_n) = n - 1$.

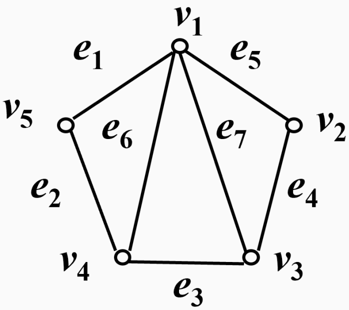
- $\kappa(G)$ 可以理解为从 G 中去除的最小顶点数使的 G 要么连通分支数增加，要么只包含一个顶点.
- $\kappa(G) = 0$ 当且仅当 $G = K_1$.
- 若 $\kappa(G) \geq k$，则称 G 为 k-连通图，$k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.
- 根据定义，若 G 是 k-连通图，则 G 亦是 j-连通图，$0 \leq j \leq k$.

定义 3.6. 设 G 为连通图, 称

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 为边割集}\}$$

为 G 的边连通度 edge connectivity. 若 $\lambda(G) \geq r$，则称 G 是 r 边-连通图，$r \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

例子 3.2.



- $\kappa = 2$, G 是 2-连通图, 也是 0-连通，1-连通.
- $\lambda = 2$, G 是 2 边-连通图, 也是 0 边-连通，1 边-连通.

点连通度与边连通度

- $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n - 1.$
- 若 G 中有割点，则 $\kappa(G) = 1$；若有桥，则 $\lambda(G) = 1.$
- 若 $\kappa(G) = 1$，是否意味 G 中一定包含割点?

定理 *3.1.* 对于简单无向图 G 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

证明. 若 G 为完全图 K_n，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n-1$ 下面考虑非完全图.

令 $\lambda(G) = k \geq 1$, 则 G 存在边割集 $E' = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \ldots, \{u_k, v_k\}\}$. 令 V' 为 E' 中边的任意一端点构成的集合，比如 $V' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. 若去除 V' 使的 G 连通分支数增加，则 V' 为 G 的点割集且 $|V'| \leq k$，故 $\kappa(G) \leq |V'| \leq k = \lambda(G)$; 否则，$u_1$ 最多有 k 个邻居. 因为可以将 E' 中的边分成两类，与 u_1 关联的边集 E'_1，以及 $E'_2 \triangleq E' - E'_1$，$u_1$ 的邻居除了 E'_1 中的 v_i 之外，只能是 E'_2 中的 u_i，而 $|E'_1| + |E'_2| = k$，故 u_1 至多有 k 个邻居. u_1 的所有邻居 $N(u_1)$ 构成了图的一个点割集且 $|N(u_1)| \leq k$，故 $\kappa(G) \leq k = \lambda(G)$.

由 $\delta(G)$ 定义可知，G 中存在一顶点 v 其度数为 $\delta(G)$，即 v 所关联的所有边个数为 $\delta(G)$，而这些边构成了 G 的一个边割集. 故 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

综上，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

有向图的连通性及分类

定义 *3.7.* 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为一个有向图，对于任意 $v_i, v_j \in V$, 若从 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i 可达 v_j, 记作 $v_i \to v_j$. 规定 $v_i \to v_i$. 若 $v_i \to v_j$ 且 $v_j \to v_i$, 则称 v_i 与 v_j 是相互可达的, 记作 $v_i \leftrightarrow v_j$. 规定 $v_i \leftrightarrow v_i$.

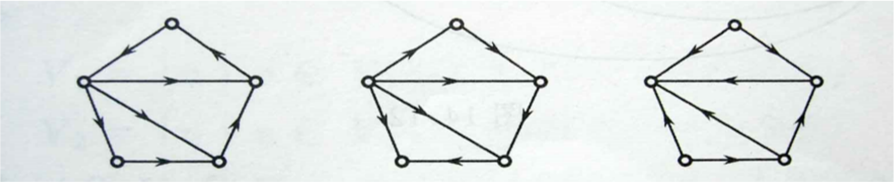
- $\to$ 具有自反性、传递性.
- $\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性.

定义 *3.8.* 若有向图 $G = \langle V, E\rangle$ 的基图是连通图，则称 G 是弱连通图 weakly connected graph，简称为连通图.

- 若对于任意 $v_i, v_j \in V$, $v_i \to v_j$ 与 $v_j \to v_i$ 至少有一个成立，则称 G 是单向连通图 semi-connected graph.
- 若对于任意 $v_i, v_j \in V$ 均有 $v_i \leftrightarrow v_j$，则称 G 是强连通图 strongly connected graph.

有向图的连通性

例子 3.3 (图的连通性).



强连通　　单向连通　　弱连通

定理 *3.2.* 有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是强连通图当且仅当 G 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

证明*.* 只需证明（$\Rightarrow$）. 令 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, P_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, P_n 为 v_n 到 v_1 的通路. 依次连接 $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ 所得到的回路经过 G 中每个顶点至少一次.

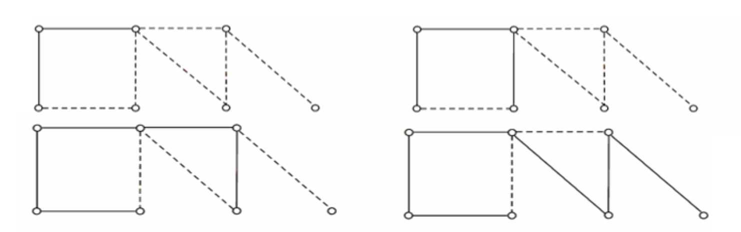
定理 *3.3.* 有向图 G 是单向连通图当且仅当 G 中存在经过每个顶点至少一次的通路.

扩大路径法

定义 3.9. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，P 为 G 中一条路径. 若此路径的两个端点都不与通路外的顶点相邻，则称 P 是极大路径.

- 任取一条边，如果它有一个端点与其他的顶点相邻，就将这条边延伸到这个顶点；
- 继续这一过程，直至得到一条极大路径为止，称此种方法为扩大路径法.
- 用扩大路径法总可以得到一条极大路径. 在有向图中可类似讨论.

例子 3.4 (极大路径).

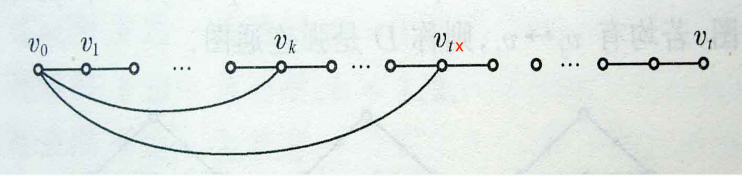


- 由一条路径扩大出的极大路径不惟一.
- 极大路径不一定是最长的路径.

例子 *3.5.* 令 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图有 $\delta(G) \geq 2$. 证明 G 中存在长度大于等于 $\delta(G)+1$ 的圈.

证明. 设 $P = v_0 v_1 \ldots v_\ell$ 是一条极大路径，由于 $\delta(G) \leq d(v_l) \leq \ell$ 故 $\ell \geq \delta(G)$.

由于 v_0 不与 P 外顶点相邻且 $d(v_0) \geq \delta(G)$，故在 P 上除 v_1 外，至少还存在 $\delta(G)-1$ 个顶点与 v_0 相邻. 令 v_x 为离 v_0 最远的顶点，则 $v_0 v_1 \ldots v_x v_0$ 为 G 中长度大于等于 $\delta+1$ 的圈.



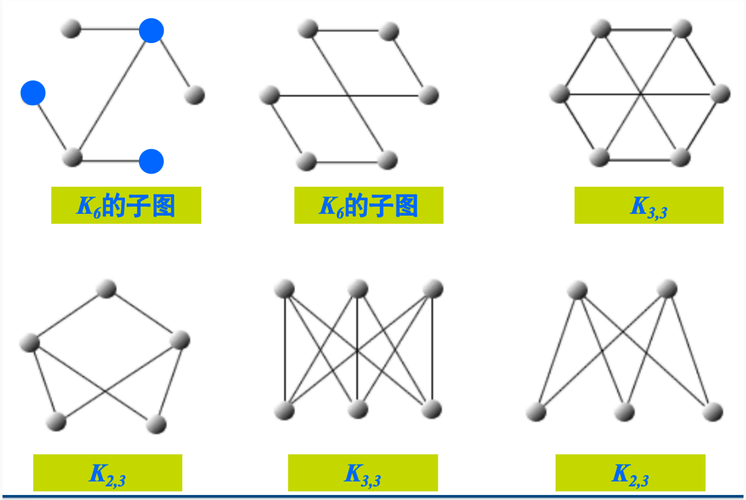
$\delta(G)=3$ 的例子.

定义 *3.10.* 令 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个无向图，若能将 V 分成 V_1 和 V_2 有 $V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\emptyset$，使的 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二分图 bipartite graph，并称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集. 二分图也记为 $\langle V_1,V_2,E\rangle$.

定义 *3.11.* 若二分图 G 为简单图，V_1 中每个顶点均与 V_2 中所有顶点均相邻，则称 G 为完全二分图，记为 $K_{r,s}$，其中 $r=|V_1|, s=|V_2|$.

按照定义，$n\geq 2$ 阶零图为二分图.

二分图



二分图举例.

定理 3.4. 一个 $n \geq 2$ 的 n 阶无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是二分图当且仅当 G 中无奇圈.

证明.($\Rightarrow$) 令 G 为二分图，若 G 中无圈则证毕. 不然，令 $C = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_\ell} v_{i_1}$ 为 G 中任意一个圈. 不妨设 $v_{i_1} \in V_1$，则根据二分图的定义 $v_{i_2} \in V_2$，进而 $v_{i_3} \in V_1$，$\ldots$，$v_{i_\ell} \in V_2$. 故 ℓ 为偶数，C 为偶圈.

($\Leftarrow$) 现假设 G 无奇圈，并且 G 为连通图，不然，可以讨论每个连通分量. 任选 $v_0 \in V$ 并构造顶点划分，

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \equiv 0 \pmod 2\},$$
$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \equiv 1 \pmod 2\}.$$

根据假设条件，V_1, V_2 非空，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$，$V_1 \cup V_2 = V$. 因此，只需证明 V_1 中任意两顶点不相邻，V_2 中任意两顶点不相邻.

二分图

假设 $v_i, v_j \in V_1$ 相邻，即存在 $e = \{v_i, v_j\} \in E$. 令 v_0 到 v_i, v_j 的最短路径分别为 P_i, P_j，从而 $d(v_0, v_i)$, $d(v_0, v_j)$ 均为偶数. 因此，P_i, P_j, e 构成了一条长度为奇数的回路. 该回路中一定包含长度为奇数的圈，因为可以将回路中的边分为 P_i, P_j 共有的边和独有的边以及 e，其中共有的边在回路中一定成对出现（出现偶数次），故 P_i, P_j 独有的边和 e 中一定会出现奇数长度的圈. 与已知条件矛盾，故 V_1 中任意两顶点不相邻. 同理可证，V_2 中任意两顶点不相邻. 即 G 为二分图.

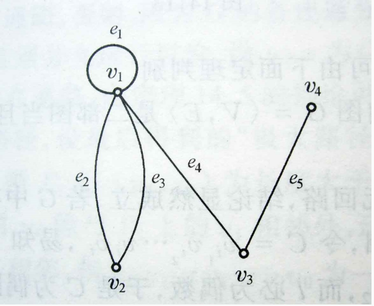
图的矩阵表示

无向图的关联矩阵

定义 *4.1* (无向图的关联矩阵). 无向图 $G=\langle V,E\rangle$, 其中 $|V|=n$, $|E|=m$. 令 b_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $[b_{ij}]_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记为 $\mathbf{B}(G)$.

例子 *4.1*.

$$\mathbf{B}(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$



无向图关联矩阵的性质

关联矩阵 $\mathbf{B}(G)$ 具有如下性质:

- $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 2, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$
- $\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = d(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
- $\sum_{i,j} b_{ij} = 2m.$
- $\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 0 \iff v_i$ 是孤立点.
- 平行边的列在关联矩阵中是相同的.

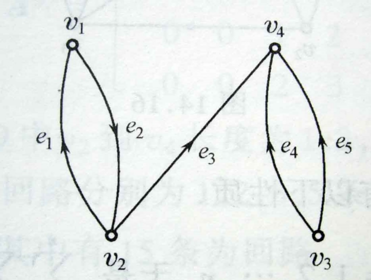
定义 *4.2* (有向无环图的关联矩阵). 设有向无环图 $G = \langle V, E \rangle$，令

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为} e_j \text{ 的起点} \\ 0, & v_i \text{ 与} e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为} e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $[b_{ij}]_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记为 $\mathbf{B}(G)$.

例子 *4.2*.

$$\mathbf{B}(G) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



有向无环图关联矩阵的性质

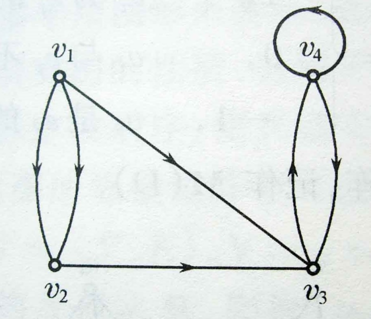
有向无环图关联矩阵满足如下性质:

- 每列恰好有一个 $+1$ 和一个 -1.
- -1 的个数等于 $+1$ 的个数，都等于边数 m.
- 对于第 i 行，$+1$ 的个数等于 $d^+(v_i)$，-1 的个数等于 $d^-(v_i)$.
- 平行边对应的列相同.

定义 4.3. 设图 $G=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. 令 a_{ij} 为连接顶点 v_i 与顶点 v_j 边的个数，称 $[a_{ij}]_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵，记作 $\mathbf{A}(G)$，或简记为 $\mathbf{A}$.

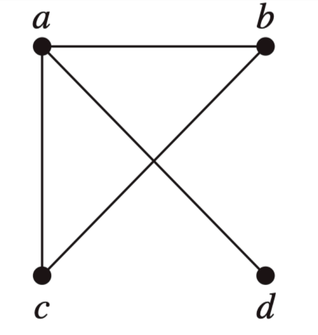
例子 4.3 (有向图邻接矩阵).

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$



例子 *4.4 (*无向图邻接矩阵*).*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$



有向图邻接矩阵的性质

有向/无向图邻接矩阵的性质:

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d^{+}(v_i)$ or $d(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d^{-}(v_j)$ or $d(v_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$.
- 对于有向图 $\sum_{i,j} a_{ij} = m$, 即图中长度为 1 的通路数.
- 对于无向图 $\sum_{i,j} a_{ij} = 2m$.
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, 即图中长度为 1 的回路数.

邻接矩阵的应用

定理 *4.1.* 设 $\mathbf{A}$ 为图 G 的邻接矩阵，顶点集 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 则 $\mathbf{A}$ 的 ℓ 次幂 $\mathbf{A}^\ell\,(\ell \geq 1)$ 中元素:

- $a_{ij}^{(\ell)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 ℓ 的通路数.
- $a_{ii}^{(\ell)}$ 为 v_i 到自身长度为 ℓ 的回路数.
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(\ell)}$ 为长度为 ℓ 的回路总数.
- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\ell)}$ 为长度为 ℓ 的通路总数.

推论 *4.1.* 令 $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^\ell\,(\ell \geq 1)$, 则

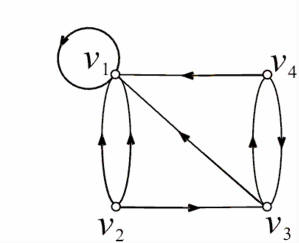
- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ 为长度小于或等于 ℓ 的通路数.
- $\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ 为长度小于或等于 ℓ 的回路数.

例子 *4.5.* 有向图 G 如图所示，求 $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, 并回答以下问题:

(1) G 中长度为 $1, 2, 3, 4$ 的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?

(2) G 中长度小于或等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条回路?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



实例求解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(1) D 中长度为 1 的通路为 8 条, 其中有 1 条是回路.
G 中长度为 2 的通路有 11 条, 其中有 3 条是回路.
G 中长度为 3 的通路有 14 条, 其中有 1 条是回路.
G 中长度为 4 的通路有 17 条, 其中有 3 条是回路.

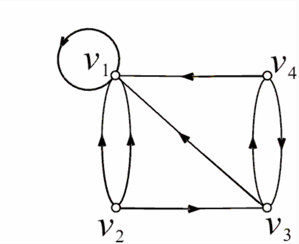
(2) G 中长度小于等于 4 的通路总共有 50 条, 其中有 8 条是回路.

可达矩阵

定义 4.4. 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } v_i \text{ 可达 } v_j \\ 1, & \text{否则.} \end{cases}$$

称 $[p_{ij}]_{n\times n}$ 为 G 的可达矩阵，记作 $\mathbf{P}(G)$，简记为 $\mathbf{P}$. $\mathbf{P}(G)$ 的主对角线上的元素全为 1. G 强连通当且仅当 $\mathbf{P}(G)$ 为全 1 矩阵.

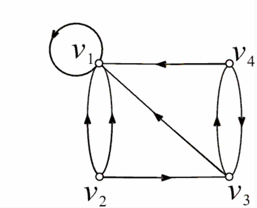


$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可达矩阵

- 给定图，如何计算可达矩阵?
- 有向图的可达矩阵和二元关系的传递闭包有何关联?

图的邻接矩阵表示与图同构（选学）



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 给定图 G 与其邻接矩阵表示 $\mathbf{A}(G)$.
- 现将图 G 中 v_1 与 v_3 交换（标号交换），v_2 与 v_4 交换得到图 G'，试写出 $\mathbf{A}(G')$.
- $\mathbf{A}(G')$ 与 $\mathbf{A}(G)$ 有何关联？试用矩阵运算建立二者间的关联.
- G' 与 G 是否依然是同一个图，即二者是否同构？
- 从图邻接矩阵表示的角度看，一个图有多少种同构图？

图的运算

- 并图.
- 差图.
- 交图.
- 环和.

习题

习题课

- 无向图和有向图及其有关的概念; 握手定理及其推论； 图的同构
- 通路与回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类
- 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解图及其有关的概念
- 深刻理解和灵活地应用握手定理及推论
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

练习 1

例子 *5.1.* 在 9 阶无向图 G 中, 每个顶点的度数不是 5 就是 6. 证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点.

证明. 关键是利用握手定理的推论.

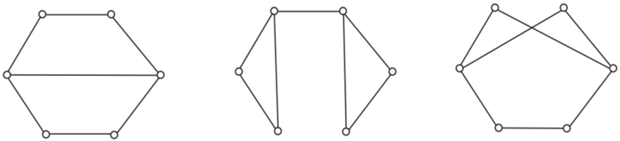
方法一：穷举法
设 G 中有 x 个 5 度顶点, $(9-x)$ 个 6 度顶点. 由于奇度顶点的个数是偶数，$(x, 9-x)$ 只有 5 种可能：$(0,9)$, $(2,7)$, $(4,5)$, $(6,3)$, $(8,1)$, 它们都满足要求.

方法二：反证法
否则，至多有 4 个 6 度顶点且至多有 5 个 5 度顶点. 根据握手定理推论，奇度顶点至多 4 个，因此节点总度数至多为 $4 \times 6 + 4 \times 5 = 44$，这与已知条件矛盾（总度数至少为 46）.

练习 2

例子 ***5.2.*** 存在以 $2,2,2,2,3,3$ 为顶点度数的简单图吗? 若存在, 画出尽可能多的这种非同构的图来.

解



练习 3

例子 *5.3.* 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为有向简单图, 已知 $\delta(G) \geq 2$, $\delta^+(G) > 0$, $\delta^-(G) > 0$. 证明 G 中存在长度 $\geq \max\{\delta^+, \delta^-\} + 1$ 的圈.

证明. 用扩大路径法证明.

设 $\delta^- \geq \delta^+$, 证明 G 中存在长度 $\geq \delta^- + 1$ 的圈.

设 $P = v_0 v_1 \ldots v_\ell$ 为极大路径, 则 $\ell \geq \delta^-$. 在 P 上存在 $d^-(v_0) \geq \delta^-$ 个顶点邻接到 v_0, 设 v_k 是其中离 v_0 最远的顶点, $k \geq \delta^-$. 于是, $v_0 v_1 \ldots v_k v_0$ 为 G 中长度 $\geq \delta^- + 1$ 的圈.

当 $\delta^+ \geq \delta^-$ 时，类似可证.

练习 4

例子 *5.4.* 有向图 G 如图所示, 回答下列诸问:

(1) G 中有几种不同构的圈?

(2) G 中有几种不同构的非圈简单回路?

(3) G 是哪类连通图?

(4) G 中, 从 v_1 到 v_4 的长度为 $1,2,3,4$ 的通路各有多少条?

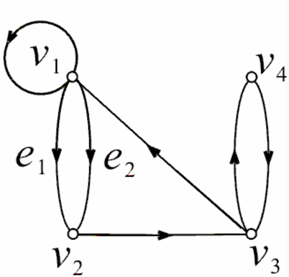
(5) G 中, 从 v_1 到 v_1 的长度为 $1,2,3,4$ 的回路各有多少条?

(6) G 中长度为 4 的通路 (不含回路) 有多少条?

(7) G 中长度为 4 的回路有多少条?

(8) G 中长度不超过 4 的通路有多少条? 其中有几条是回路?

(9) 写出 G 的可达矩阵.



解答

(1) 有 3 种非同构的圈, 长度分别为 $1, 2, 3$.

(2) 有 3 种非同构的非圈简单回路, 它们的长度分别为 $4, 5, 6$.

(3) G 是强连通的.

为解 (4) 至 (8), 先求 G 的邻接矩阵的前 4 次幂.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解答

(4) v_1 到 v_4 长度为 $1,2,3,4$ 的通路数分别为 $0,0,2,2$(定义意义下).

(5) v_1 到 v_1 长度为 $1,2,3,4$ 的回路数分别为 $1,1,3,5$.

(6) 长度为 4 的通路 (不含回路) 为 33 条.

(7) 长度为 4 的回路为 11 条.

(8) 长度 ≤ 4 的通路 88 条. 其中 22 条为回路.

(9) 4×4 的全 1 矩阵.

作业

作业

- 14-4, 14-6, 14-11, 14-14, 14-18.
- 14-23, 14-28, 14-34, 14-39, 14-41, 14-47, 14-48.