函数

李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

计算机科学与技术学院

Outline

函数的定义与性质

函数定义

定义 *1.1.* 令 A, B 为非空集合，一个从集合 A 到 B 上的函数 f 为一种赋值（assignment），对于 A 中每一个元素 a，f 都为其赋予 B 中唯一元素 b. 若 f 将 $a \in A$ 赋值为 b，则记为 $f(a) = b$. 通常记函数为 $f\colon A \mapsto B$.

- A 称为 f 的定义域（domain），B 称为 f 的陪域（codomain）.
- f 的值域（range）为 A 中所有元素像的集合，即[1]$\mathrm{range}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
- $\mathrm{range}(f) \subseteq \mathrm{codomain}(f) = B$，$\mathrm{range}(f)$ 通常也被记为 $\mathrm{image}(f)$.
- 若 $f(a) = b$，则称 b 为 a 的像（image），称 a 为 b 的原像（preimage）[2].
- 若 $f(a) = b$, 那么 b 的原像是否唯一?

[1]**注意**：指定教材将 $\mathrm{range}(f)$ 简记为 $\mathrm{ran}(f)$，$\mathrm{domain}(f)$ 简记为 $\mathrm{dom}(f)$，两种简记不是数学惯用符号.
[2]**注意**：指定教材将像与原像的定义限定于集合，这种限定并没有带来任何额外好处，亦不符合数学惯用定义.

函数相等

定义 1.2 (函数相等). 令 f, g 为函数，f 与 g 相等当且仅当如下两个条件同时成立，

1. $\operatorname{domain}(f) = \operatorname{domain}(g)$;
2. $\forall x \in \operatorname{domain}(f)$, 有 $f(x) = g(x)$.

例子 1.1 (函数相等). 判断如下函数是否相等，

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$.
- $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$, $\operatorname{domain}(f) = \operatorname{domain}(g) = (0, 1)$.

定义 *1.3.* 令 A, B 为非空集合，所有从 A 到 B 的函数集合记为 B^A，

$$B^A \triangleq \{f \mid f\colon A \mapsto B\}.$$

1. 若 $|A| = m$, $|B| = n$，则 $|B^A| = n^m$;
2. 教材中讨论了 A 或 B 为空集的情形，这种极端情形对建立数学理论并没有帮助.

函数构造

例子 *1.2.* 令 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$，求 B^A.

我们用有序对 $\langle a,b\rangle$ 来表示有穷集合之间的函数，其中 $a\in A, b\in B$.

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}, & f_1 &= \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_2 &= \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}, & f_3 &= \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_4 &= \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}, & f_5 &= \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_6 &= \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}, & f_7 &= \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}.
\end{aligned}
$$

思考：上述函数表示与二进制表示有何关联?

函数的像

定义 1.4. 令 f 为从 A 到 B 的函数，$S \subseteq A$，$T \subseteq B$.

1. S 在函数 f 下的像（image）被定义为 $f(S) \triangleq \{f(s) \mid s \in S\}$.
2. T 在函数 f 下的原像（preimage）被定义为 $f^{-1}(T) = \{a | a \in A \wedge f(a) \in T\}$.

- 在我们的定义中，像与原像同时适用于元素 $a \in A$ 和集合 $S \subseteq A$.
- 一般情况下，对 $S \subseteq A$，我们有 $S \subseteq f^{-1}(f(S))$，为什么?

例子 1.3 (像与原像). 设 $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$，且

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{if } n \text{ is even} \\ x+1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

令 $S = \{0, 1\}$，$T = \{2\}$，那么有

- $f(S) = f(\{0,1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$，$f^{-1}(T) = f^{-1}(\{2\}) = \{4, 1\}$.
- $f^{-1}(f(S)) = ?$

定义 *1.5.* 设 $f\colon A\mapsto B$,

1. 若对任意 $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ 仅当 $x_1 = x_2$, 则称 f 是单射函数（injection）[3];
2. 若 $\mathrm{range}(f) = B$, 则称 f 是满射函数（surjection）[4];
3. 若 f 既是单射也是满射函数, 则称 f 是双射函数（bijection）[5].

- *injective*, *surjective*, and *bijective*.
- *injectif*, *surjectif*, and *bijectif* are creations of Bourbaki.

[3]英文又称为 one-to-one.
[4]英文又称为 onto.
[5]英文又称为 one-to-one correspondence.

例子 *1.4.* 判断如下函数是否为单射，满射，双射：

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.
2. $f : \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
3. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
4. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
5. $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $f(x) = (x^2 + 1)/x$.

例子 *1.5.* 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f\colon A \mapsto B$

1. $A = \mathcal{P}(\{1,2,3\}), B = \{a,b\}^{\{1,2,3\}}$.
2. $A = [0,1], B = [1/4, 1/2]$.
3. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.
4. $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], B = [-1,1]$.

1. $A = \mathcal{P}(\{1,2,3\}), B = \{a,b\}^{\{1,2,3\}}$.

$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
$B = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,a\rangle\}, & f_1 &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\} \\
f_2 &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle\}, & f_3 &= \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,b\rangle\} \\
f_4 &= \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,a\rangle\}, & f_5 &= \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 3,b\rangle\} \\
f_6 &= \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle\}, & f_7 &= \{\langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,b\rangle\}.
\end{aligned}
$$

故，可建立如下双射函数 $f\colon A \mapsto B$:

$$
\begin{aligned}
&f(\emptyset) = f_0,\ f(\{1\}) = f_1,\ f(\{2\}) = f_2,\ f(\{3\}) = f_3, \\
&f(\{1,2\}) = f_4,\ f(\{1,3\}) = f_5,\ f(\{2,3\}) = f_6,\ f(\{1,2,3\}) = f_7.
\end{aligned}
$$

2. $A = [0, 1], B = [1/4, 1/2]$.

令 $f : A \mapsto B$, $f(x) = x/4 + 1/4$. The two steps correspond to Scale and Shift.

3. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$.

$$f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0, \\ -2x - 1 & x < 0. \end{cases}$$

4. $A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], B = [-1, 1]$.

$$f : [\pi/2, 3\pi/2] \mapsto [-1, 1], \quad f(x) = -\sin(x).$$

满射函数的计数

例子 *1.6.* 令集合 $A=\{1,2,\dots,m\}$, $B=\{1,2,\dots,n\}$, $m\geq n$, $S=B^A$. S 中有多少满射函数?

分析：满射意味着 B 中的所有元素都要出现在 range(f)，这一约束条件使计数变的困难. 如果能消除约束，则计数从 A 到 B 的函数会很容易，即 $|B|^{|A|}$. 比如，从 A 到集合 $B-\{1\}$ 的全部函数个数为 $(n-1)^m$，从 A 到集合 $B-\{1,2\}$ 的全部函数个数为 $(n-2)^m$. 这启发我们使用容斥原理.

求解：令 P_i 表示元素 $i\in B$ 不出现在 range(f) 这一性质，A_i 表示从 A 到 B 满足 P_i 函数的集合. 则所求满射函数的个数为 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\dots\cap\overline{A}_n|$.

根据函数计数规则有，$|A_i|=(n-1)^m$, $|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$, ..., $|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|=0$, 其中 $1\leq i\leq j\leq n$. 根据容斥原理有，

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\dots\cap\overline{A}_n| &= n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m+\dots(-1)^n\binom{n}{n}0\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m.
\end{aligned}
$$

线性函数的单射与满射 (选学)

回忆线性代数中介绍的线性函数,

- 令 V, W 为向量空间, 对给定函数 $f\colon V \mapsto W$, 如果对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ 有,

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}),$$

  则称函数 f 为从向量空间 V 到 W 的线性函数.
- 证明 V 上的线性函数为单射函数当且仅当 $f(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$.
- 考虑特殊的向量空间 $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$, 此时 V 上的线性函数 f 等价于 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- 此时, 矩阵 $\mathbf{A}$ 满足何种条件时 f 分别是单射、满射和双射的?
- 在线性代数中, 为什么我们只对方阵定义逆矩阵?

单射与满射

定理 *1.1.* 令 A, B 为有穷集合，

1. 若从 A 到 B 存在单射函数则 $|A| \leq |B|$;
2. 若从 A 到 B 存在满射函数则 $|A| \geq |B|$;
3. 若 $|A| = |B|$ 则 f 为单射 $\iff$ f 为满射 $\iff$ f 为双射.

证明. (1) 假设 $f \colon A \mapsto B$ 为单射函数，则 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ 有 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 由于 $f(a_1), f(a_2) \in B$，故 B 至少包含与 A 一样多的元素，即 $|A| \leq |B|$.

证明. (2) 假设 $f \colon A \mapsto B$ 为满射函数，则 $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ 有 $f^{-1}(\{b_1\}), f^{-1}(\{b_2\})$ 非空. 由函数定义可知 $f^{-1}(\{b_1\}) \cap f^{-1}(\{b_2\}) = \emptyset$. 由于 $A = \cup_{b \in B} f^{-1}(\{b\})$，故 $|A| \geq |B|$.

推论 *1.1.* 令 A, B 为有穷集合，$f \colon A \mapsto B$ 为从 A 到 B 的函数. 若从 A 到 B 存在双射函数则 $|A| = |B|$.

单射与满射

思考:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可视为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的线性函数;
- 若 $\mathbf{A}$ 为单射，则定理1.1要求 $n \leq m$，即矩阵的列数要足够小，保证列线性无关;
- 若 $\mathbf{A}$ 为满射，则定理1.1要求 $n \geq m$，即矩阵的行数要足够小，保证行线性无关;

重要函数举例

1. 常函数（constant function）$f: A \mapsto B$，对 $\forall x \in A$ 都有 $f(x) = c$，其中 c 为常数.
2. 恒等函数（identity function）$I: A \mapsto A$，对 $\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.
3. 特征函数（indicator function）$\chi: U \mapsto \{0, 1\}$，令 $A \subseteq U$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

4. 阶跃函数（step function）$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x),$$

其中 A_i 为 $\mathbb{R}$ 的一个划分（partition），满足 1) $A_i \cap A_j = \emptyset \, \forall i, j$, 2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R}$，$\alpha_i \in \mathbb{R}$.

阶跃函数为特征函数的线性组合，在分析中有着重要应用，如定义黎曼积分（Riemann integral）、勒贝格积分（Lebesgue integral）以及离散随机变量的累积概率分布.

勒贝格积分初探（选学）

- 黎曼积分通过划分定义域来定义积分，比如划分成不相交的区间.
- Dirichlet 函数的定义域为 $[0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad \int_{[0,1]} f(x)\,dx = ?$$

- 勒贝格积分通过划分函数的值域来定义积分.
- $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ 对应的勒贝格积分为 $\int f dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell(A_i)$.
- 勒贝格积分比黎曼积分对应的可积函要更广，且有更优良的性质，如积分与极限可交换顺序，是打开现代数学大门的一把钥匙.
- 感兴趣的同学可以参考 *Gerald B. Folland* 的经典教材[6].

[6] Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.

与函数相关的重要集合等式

定理 ***1.2.*** 令 $f\colon A \mapsto B$，$X_1, X_2 \subseteq A$. 有

1. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
2. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
3. $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$.
4. 若 f 为单射，则有 $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, $f(X_1) - f(X_2) = f(X_1 - X_2)$.

与函数相关的重要集合等式

(1) 对任意 $y \in f(X_1 \cup X_2)$ 有

$$\begin{aligned}
y \in f(X_1 \cup X_2) &\iff \exists x(x \in X_1 \cup X_2 \ \wedge\ f(x) = y) \\
&\iff \exists x((x \in X_1 \vee x \in X_2) \ \wedge\ f(x) = y) && (1) \\
&\iff (\exists x \in X_1 \wedge f(x) = y) \vee (\exists x \in X_2 \wedge f(x) = y)) && (2) \\
&\iff y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2) \\
&\iff y \in f(X_1) \cup f(X_2).
\end{aligned}$$

(2) 对任意 $y \in f(X_1 \cap X_2)$ 有

$$
\begin{aligned}
y \in f(X_1 \cap X_2) &\iff \exists x(x \in X_1 \cap X_2 \ \wedge\ f(x) = y) \\
&\iff \exists x((x \in X_1 \wedge x \in X_2) \ \wedge\ f(x) = y) && (3) \\
&\implies \ (\exists x \in X_1 \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x \in X_2 \wedge f(x) = y) && (4) \\
&\iff y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \\
&\iff y \in f(X_1) \cap f(X_2).
\end{aligned}
$$

与函数相关的重要集合等式

(3) 对任意 $y \in f(X_1) - f(X_2)$ 有

$$
\begin{aligned}
y \in f(X_1) - f(X_2) &\iff y \in f(X_1) \wedge y \notin f(X_2) \\
&\iff (\exists x \in X_1 \text{ s.t. } f(x) = y) \wedge (\forall x \in X_2 (f(x) \neq y)) \qquad (5) \\
&\implies \exists x \in X_1 - X_2 \text{ s.t. } f(x) = y \qquad (6) \\
&\iff y = f(x) \in f(X_1 - X_2).
\end{aligned}
$$

例子 ***1.7.*** 考虑从集合 $A=\{a,b,c\}$ 到 $B=\{1,2\}$ 上的函数 $f=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$. $X_1=\{a,b\}$, $X_2=\{c\}$.

- $f(X_1\cap X_2)=f(\emptyset)=\emptyset\subseteq\{1\}=f(X_1)\cap f(X_2)$.
- $f(X_1)-f(X_2)=\emptyset\subseteq\{1\}=f(X_1-X_2)$.

与函数相关的重要集合等式

定理 ***1.3.*** 令 $f\colon A \mapsto B$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. 有

1. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.

推论 ***1.2.*** 令 $f\colon A \mapsto B$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. 有

1. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(Y_n)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(Y_n)$.

与函数相关的重要集合等式

定理 ***1.4.*** 给定 $f\colon A \mapsto B$. 证明如下结论:

1. 对任意 $X \subseteq A$, $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
2. 对任意 $Y \subseteq B$, $Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$.
3. 如果 f 是单射, 对任意 $X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$.
4. 如果 f 是满射, 对任意 $Y \subseteq B$, $Y = f(f^{-1}(Y))$.

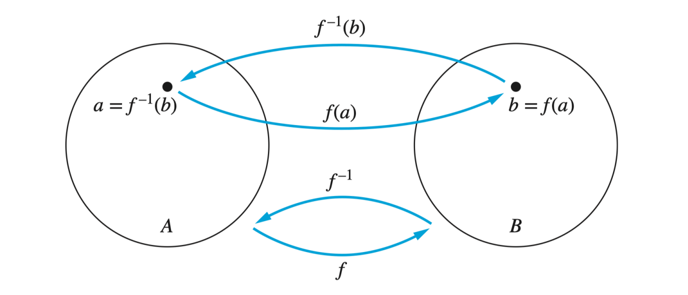
例子 1.8. 考虑从集合 $A = \{a, b, c\}$ 到 $B = \{1, 2\}$ 上的函数 $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$.
$X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2\}$.

- $X \subseteq f^{-1}(f(X)) = \{a, b, c\}$.
- $Y \supseteq f(f^{-1}(Y)) = \{1\}$.

函数的运算

逆函数

定义 2.1. 令 f 为从集合 A 到 B 的双射函数. f 的逆函数（inverse function）是一个从 B 到 A 的映射，其将 $b \in B$ 映射到 $a \in A$ 如果 $f(a) = b$. 函数 f 的逆函数被记为 f^{-1}. $f^{-1}(b) = a$ 当 $f(a) = b$.



- **思考 1**：这个定义是否是良好定义（well-defined）的？即 $f^{-1}(b)$ 是否唯一.
- **思考 2**：可否将定义中的双射函数修改为单射函数？

逆函数举例

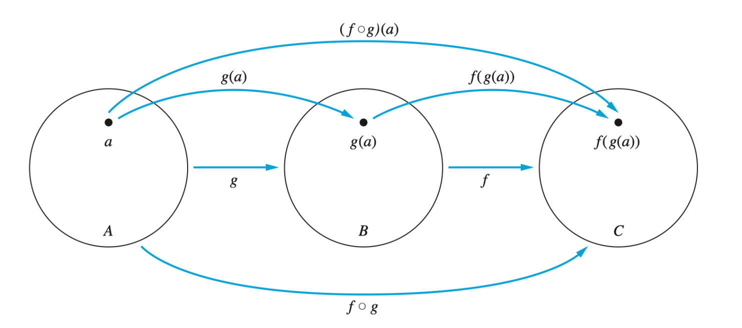
例子 *2.1.*

- 令 $f: \{a, b, c\} \mapsto \{1, 2, 3\}$， $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 1$. 问 $f(x)$ 是否可逆?
- 令 $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$， $f(x) = 2x + 3$. 问 $f(x)$ 是否可逆?
- 令 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$， $f(x) = x^2$. 问 $f(x)$ 是否可逆?

复合函数

定义 2.2. 令 g 为从集合 A 到 B 的函数，f 为从集合 B 到 C 的函数. f 与 g 的复合（composition）$f \circ g$ 是一个从 A 到 C 的函数，

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$



复合函数举例

例子 2.2. 令 f, g 为 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函数，$f(x) = 2x+3$，$g(x) = 3x+2$. 计算 $f \circ g$ 和 $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7.$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3(2x+3)+2 = 6x+11.$$

- 一般情况下，$f \circ g \neq g \circ f$，即函数复合运算不满足交换律.
- 令 $f : C \mapsto D$, $g : B \mapsto C$, $h : A \mapsto B$，根据函数复合定义，

$$(f \circ g) \circ h = f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h),$$

即函数复合运算满足结合律.

定理 *2.1.* 令 $g : A \mapsto B$, $f : B \mapsto C$.

1. 若 f, g 都是单射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是单射的.
2. 若 f, g 都是满射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是满射的.
3. 若 f, g 都是双射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是双射的.

复合函数性质

定理 ***2.2.*** 令 $g: A \mapsto B$, $f: B \mapsto C$.

1. 若 $f \circ g: A \mapsto C$ 是单射的，则 g 是单射的.
2. 若 $f \circ g: A \mapsto C$ 是满射的，则 f 是满射的.
3. 若 $f \circ g: A \mapsto C$ 是双射的，则 g 是单射的，f 是满射的.

复合函数性质

定理 *2.3.* 令 $g: A \mapsto B, f: B \mapsto C$ 均为双射函数，则

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

证明*.* 根据复合函数和逆函数的定义，$(f \circ g)^{-1}$ 与 $g^{-1} \circ f^{-1}$ 均为从 C 到 A 的函数，故定义域相同.

任取 $a \in A$，令 $b = g(a), c = f(b) = f(g(a))$. 根据逆函数定义，

$$(f \circ g)^{-1}(c) = a = g^{-1}(b) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1} \circ f^{-1}(c).$$

定理 *2.4.* 令 $f\colon A\mapsto B$ 为双射函数，则

$$f^{-1}\circ f=I_A,\quad f\circ f^{-1}=I_B.$$

证明. 任取 $a\in A$，令 $b=f(a)$，则由逆函数定义可知 $f^{-1}(b)=a$. 故

$$f^{-1}\circ f(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a.$$

即 $f^{-1}\circ f=I_A$. 同时有，

$$f\circ f^{-1}(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b.$$

即 $f\circ f^{-1}=I_B$.

双射函数与集合基数

可数集

定义 *3.1.* 若存在一个从集合 A 到集合 B 的双射函数，则称 A 和 B 是等势，即具有相同的基 (cardinality)，记为 $A \approx B$ 或 $|A| = |B|$.

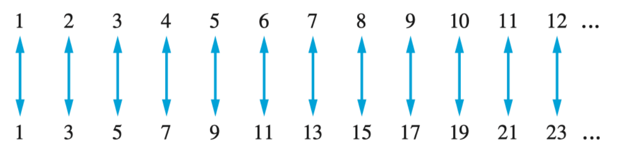
定义 *3.2.* 如果存在一个从集合 A 到集合 B 的单射函数，则称集合 B 优势于集合 A，记为 $A \preccurlyeq \cdot B$ 或 $|A| \leq |B|$. 若 $|A| \leq |B|$ 且二者的基不同，则称集合 B 真优势于A，记为 $A \prec \cdot B$ 或 $|A| < |B|$.

定义 *3.3.* 若一个集合为有穷集合或与自然数 $\mathbb{N}$ 有相同的基则称其为可数的 (countable)，否则称其为不可数的 (uncountable).

可数集

例子 3.1 (正奇数可数). 证明正奇数为可数集.

证明. 考虑 $f(n) = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. f 为从 $\mathbb{N}$ 到正奇数集的双射函数.



例子 3.2 (希尔伯特旅馆). 希尔伯特旅馆（Hilbert's Grand Hotel）为一个拥有可数无穷个（countably infinite number）房间的旅馆，每个房间都住着一个神秘旅客. 夜幕降临，旅馆新来了一个旅客，我们需要为其安排房间.

可数集

例子 3.3 (整数集可数). 证明整数集为可数集.

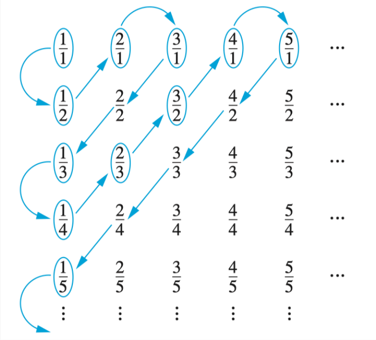
证明. 考虑 $f\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{if } n \text{ is even}, \\ -(n-1)/2, & \text{if } n \text{ is odd}. \end{cases}$$

例子 3.4 (正有理数可数). 证明正有理数集为可数集.

证明. 每个正有理数都可以写成两个正整数的商 p/q. 我们可以这样排列正有理数，分母 $q=1$ 的放在第一行，$q=2$ 的放在第二行，以此类推.

然后以对角线的形式排列正有理数. 定义 $p+q$ 为 p/q 的高度，先列出高度为 2 的有理数，然后是高度 3 的有理数，以此类推，如果一个数之前出现过，我们则跳过. 用这种方式，我们给每个正有理数赋值了一个唯一的正整数，即我们建立了从有理数到 $\mathbb{N}$ 的双射函数.



例子 3.5 (有理数可数). 证明有理数集为可数集.

证明. 与例子 3.4 类似，考虑有理数的分数表示 p/q，不过此时我们令 $q>0$. 并定义 $|p|+q$ 为有理数 p/q 的高.

$$\frac{0}{1}=0$$

为仅有的高度为 1 的有理数,

$$\frac{-1}{1},\quad \frac{1}{1}$$

为仅有的高度为 2 的有理数,

$$\frac{-2}{1},\quad \frac{-1}{2},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{1}{2}$$

为仅有的高度为 3 的有理数，以此类推. 按照对角线方向，我们先列出所有高度为 1 的有理数，然后是所有高度为 2 的，以此类推. 这样我们就建立了从有理数 $\mathbb{Q}$ 到自然数 $\mathbb{N}$ 之间的双射函数.

例子 *3.6* ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数). 证明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 为可数集.

使用与例子 3.4 类似的对角线法则 (将有序对 $\langle p, q \rangle$ 放置在 p 行 q 列)，可以将 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中所有的数枚举出来.

例子 ***3.7.*** 任意两个闭区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 上的点集具有相同的基.

例子 ***3.8.*** 复平面（complex plane）与三维空间中的单位球（unit sphere）具有相同的基.

考虑立体投影（steregraphic projection），即从北极点（north pole）N 与复平面任意一点 z 连线与单位球的交点.

不可数无穷集合

例子 ***3.9.*** 闭区间 $[0,1]$ 与开区间 $(0,1)$ 上的点集具有相同的基.

对于 $0, 1, 1/2, 1/2^2, \ldots$ 构造如下映射,

$$\begin{array}{ccccccc}
0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \cdots, & \frac{1}{2^n}, & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^4}, & \cdots, & \frac{1}{2^{n+2}}, & \cdots
\end{array}$$

而 $[0,1]$ 中其余的数则映射到自身. 该映射为双射函数.

这与希尔伯特旅馆有何关联?

不可数无穷集合

定理 *3.1* (实数不可数 $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$). 单位闭区间 $[0,1]$ 内的实数集不可数.

证明. 假若 $[0,1]$ 内的实数可数，并被如下方式列出，

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\cdots a_{1n}\ldots\\
\alpha_2 &= 0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\cdots a_{2n}\ldots\\
\alpha_3 &= 0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\cdots a_{3n}\ldots\\
\alpha_4 &= 0.a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,a_{44}\cdots a_{4n}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

现考虑 $\beta = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$

$$
b_n = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{nn} \neq 1,\\ 2 & \text{if } a_{nn} = 1. \end{cases}
$$

则 β 不会出现在 α_n 序列中.

不可数无穷集合

定理 *3.2.* 对任意集合 A 都有 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

证明. 首先，从 A 到 $|\mathcal{P}(A)|$ 存在单射函数 $f(x) = \{x\}$，故 $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

再证，从 A 到 $|\mathcal{P}(A)|$ 不存在满射函数，即 $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. 给定任意函数 $f\colon A \mapsto \mathcal{P}(A)$，现构造如何集合 B:

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin f(x)\}.$$

① 若 $B = \emptyset$，则 $\forall x \in A, f(x) \neq \emptyset$，此时 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ 无原像. ② 若 $B \neq \emptyset$，则对任意 $x \in A$ 都有 $f(x) \neq B$. 不然，若 $f(x) = B$，则 $\forall x \in B$ 都有 $x \in f(x)$，与 B 的定义矛盾. 故 $B \in \mathcal{P}(A)$ 无原像.

定理 *3.3.* 令 A, B, C 为任意集合，有

1. $|A| \leq |A|$.
2. 若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |A|$，则 $|A| = |B|$.
3. 若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |C|$，则 $|A| \leq |C|$.

例子 *3.10.* 证明 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$.

证明. 首先，注意 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 为所有的可数无穷长度的 $0,1$ 序列.

建立从 $[0,1)$ **至** $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ **的单射函数**. 任取 $x \in [0,1)$，令 $x = 0.x_0x_1x_2\ldots$ 为 x 的二进制表示且规定序列中无连续无穷个 1 (即 $0.0111\ldots$ 对应 $0.1000\ldots$)，则对 $\forall x \in [0,1), x$ 有唯一的二进制表示，故函数 $f(x) = x_0x_1x_2\ldots$ 为所求单射函数.

建立从 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ **至** $[0,1)$ **的单射函数**. 任取 $s = x_0x_1x_2\ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，定义函数 $g(s) = 0.x_0x_1x_2\ldots$，其中 $0.x_0x_1x_2\ldots$ 为十进制表示的浮点数，则不同的序列 s 对应不同的浮点数，故 g 为单射.

综上，$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$.

集合等势与优势

令 a, b, c, d 为任意实数，则有

- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R} \approx [a, b] \approx (c, d) \approx \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- $\{0, 1\}^{A} \approx \mathcal{P}(A)$.
- $\mathbb{N} \prec \cdot \mathbb{R}$.
- $A \prec \cdot \mathcal{P}(A)$.

集合的基数

- 自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$，即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- 实数集 $\mathbb{R}$ 的基数记作 $\aleph$，即 $|\mathbb{R}| = \aleph$.
- 从定义 3.1 可知，集合的基数就是集合的势，基数越大，势就越大.
- 由于对任意集合 A 均有 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$，故不存在最大的基数.
- $\aleph_0$ 是最小的无穷基数，若 $|A| \leq \aleph_0$，则 A 为可数集.

集合的基数

1. 可数集的任何子集都是可数集.
2. 两个可数集的并是可数集.
3. 两个可数集的笛卡儿积是可数集 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
4. 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
5. 无穷集 A 的幂集 $\mathcal{P}(A)$ 不是可数集.

例子 *3.11.* 令 A, B 为集合且有 $|A| = \aleph_0, |B| = n > 0$，求 $|A \times B|$.

考虑希尔伯特旅馆，现在来了 n 个队列，每个队列均为可数集.

作业

作业

指定教材习题 8：

- 7, 10, 12, 21.
- 29. 令 $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}^A$，证明 $\mathcal{P}(A) \approx B$.
- 34, 37, 39.

作业

- 证明定理1.1-(3).
- 证明定理1.2.
- 证明定理1.3.
- 证明定理1.4.