# 集合代数

李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

计算机科学与技术学院

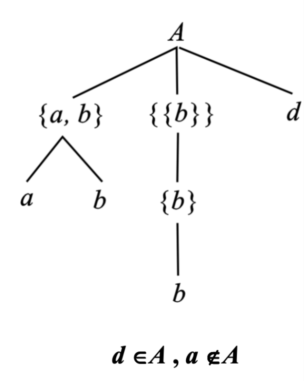
# Outline

# 集合的基本概念

# 集合的定义与表示法

1. 集合的定义
    - 集合（set）是由一系列对象（object）构成的整体，这些对象被称为集合的元素.
    - 通常通大写字母 $A, B, \ldots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, \ldots$ 表示集合的元素.
    - 如果元素 $a$ 属于集合 $A$，则记为 $a \in A$；若不属于，则记为 $a \notin A$.
    - 集合 $A$ 中所包含的元素个数称为其基（cardinality），记为 $|A|$.
    - 数学中常见的集合：$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合.
2. 集合表示法
    - 枚举法：通过枚举出全体元素来表示集合.
    - 谓词表示法：通过谓词概括出集合元素的性质.
    - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
    - $S = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0\}$.

- 集合元素的性质
  - 无序性：不关心集合中元素的顺序.
  - 相异性：集合中每个元素只计数一次.
  - 确定性：给定任意元素都可以确定是否属于一个给定集合.
  - 任意性：集合的元素也可以是集合.
- **例子：** $A = \{\{a, b\}, \{\{b\}\}, d\}$.



# 集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \neq, \nsubseteq, \subset, \not\subset$

**定义 *1.1.*** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

**定义 *1.2.*** $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$.

**定义 *1.3.*** $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$.

**定义 *1.4.*** $A \neq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.

**定义 *1.5.*** $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.

**定义 *1.6.*** $A \not\subset B \Leftrightarrow ?$

# 空集、全集与幂集

**定义 *1.7* (空集).** 空集是不含有任何元素的集合，记为 $\emptyset$.

**定理 *1.1*.** 空集是任何集合的子集.

**证明.** 给定任意集合 $A$，有 $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$，（根据空集定义）恒为真.

**推论 *1.1*.** $\emptyset$ 具有唯一性.

**定义 *1.8* (全集).** 全集（universal set）是包含所有研究对象的集合[1]，默认记为 $U$.

**定义 *1.9* (幂集).** 幂集（power set）：$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

**例子 *1.1*.** $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathcal{P}(\{a, b\}) =?, \mathcal{P}(\{a, b, c\}) =?$.

**思考：** 给定有穷集合 $A$，其幂集的大小 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ 是否成立，幂集与二进制表示有何关联?

[1] **注意：** 全集具有相对性，是否为全集取决于问题设定.

# 集合的基本运算

**定义 *2.1 (基本运算)*.**

- 并（union） $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- 交（intersection） $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
- 差（difference） $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
- 补（complement） $\overline{A} = U - A$，其中 $U$ 为全集.
- 对称差（symmetric difference） $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

其中，并和交运算可以推广至 $n$ 个集合上，

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee A_n\}$,
- $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge A_n\}$.

## 广义并与交

***定义 2.2 (广义并与交).*** 令 $\mathcal{A}$ 为一个集合的集合（其每个元素 $A \in \mathcal{A}$ 均为集合），$\mathcal{A}$ 中元素的广义并（generalized union）和广义交（generalized intersection）分别被定义

- $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ for at least one } A \in \mathcal{A}\}$, 也记为 $\cup\mathcal{A}$,
- $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ for every } A \in \mathcal{A}\}$，也记为 $\cap\mathcal{A}$.

***例子 2.1 (广义并与交).***

- $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\cup\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$, $\cup\mathcal{A} = \{1\}$.
- $\mathcal{A} = \{\{a\}\}$, $\cup\mathcal{A} = \{a\}$, $\cap\mathcal{A} = \{a\}$.
- $\mathcal{A} = \{a\}$, $\cup\mathcal{A} = a$, $\cap\mathcal{A} = a$.

# 广义并与交的性质

- 广义并与广义交减少集合的层次（大括号减少一层）;
- 单元集 $\{a\}$ 的广义并与广义交都等于 $a$;
- $\cup\emptyset = \emptyset$, $\cap\emptyset$ 无定义;
- 广义并与广义交通常情况下可以转化成初级运算
  - $\bigcup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$,
  - $\bigcap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

**例子 *2.2 (广义并交运算)*.** $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$，计算 $\cap\cup\mathcal{A} \cup (\cup\cup\mathcal{A} - \cup\cap\mathcal{A})$.

**解.** 先计算 $\cup\mathcal{A} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$, $\cap\mathcal{A} = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$. 故,

$$
\begin{aligned}
& \cap\cup\mathcal{A} \cup (\cup\cup\mathcal{A} - \cup\cap\mathcal{A}) \\
= & \cap\{a, b\} \cup (\cup\{a, b\} - \cup\{a\}) \\
= & (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a) \\
= & (a \cap b) \cup (b - a) = b.
\end{aligned}
$$

# 广义并与交（选学）

为什么要定义广义并与交运算?

- 广义并与交在点集拓扑（point set topology）中有着广泛运用.
- 点集拓扑是研究微分流形、微分几何（黎曼几何）、李群与李代数、代数拓扑等的基础.
- 其基本研究对象是拓扑空间（topology space），我们所熟知的度量空间（metric space）的推广.
- 拓扑可以直观理解为所研究对象的组织和邻近关系，度量空间的拓扑由 metric 指定.
- 在更一般的拓扑空间中，空间的拓扑则由其上定义的开集（open set）指定.
- 一个拓扑空间的开集数量可能是（大部分情况下）无穷个，因此需要广义的并和交来构造其他拓扑（如子空间拓扑，乘积拓扑）结构.

# 广义并与交（选学）

为什么要定义广义并与交运算?

- 在前期的数学学习中，我们熟知欧式空间中开集和闭集的概念.
- $n$ 个闭集的并集依然是闭集，$n$ 个开集的交依然是开集.
- $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[1/n, 1-1/n] = ?$, $\bigcap\limits_{n=2}^{\infty}(-1/n, 1+1/n) = ?$

# 集合恒等式

# 集合恒等式

| Identity | Name |
|---|---|
| $A \cap U = A$<br>$A \cup \emptyset = A$ | Identity laws 同一律 |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ | Domination laws 支配律（零律） |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Idempotent laws 幂等律 |
| $\overline{(\overline{A})} = A$ | Complementation law 双重否定 |
| $A \cup \overline{A} = U$<br>$A \cap \overline{A} = \emptyset$ | Complement laws 互补律 |

# 集合恒等式

| Identity | Name |
|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | Commutative laws 交换律 |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Associative laws 结合律 |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Distributive laws 分配律 |
| $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$<br>$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | De Morgan laws |
| $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | Absorption laws 吸收律 |

**例子 *3.1 (De Morgan's laws).*** 证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**证明 *(证明 1).*** 首先，证明 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$，我们通过对任意 $x \in \overline{A \cap B}$ 则必有 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ 来证明这一结论. 假设 $x \in \overline{A \cap B}$，根据集合补的定义有，$x \notin A \cap B$，即 $x \in A \wedge x \in B$ 为假，亦即 $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ 为真. 使用命题的 De Morgan's law，有 $\neg(x \in A)$ or $\neg(x \in B)$. 即 $x \notin A$ or $x \notin B$，亦即 $x \in \overline{A}$ or $x \in \overline{B}$. 根据集合并集的定义，有 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

然后，使用同样思路证明，$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. 假设 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$，根据集合并的定义有，$x \in \overline{A}$ or $x \in \overline{B}$，即 $x \notin A$ or $x \notin B$. 故，$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ 为真. 使用命题的 De Morgan's law，有 $\neg(x \in A \wedge x \in B)$ 为真. 根据集合交的定义有，$\neg(x \in A \cap B)$ 为真，即 $x \notin A \cap B$. 根据集合补的定义有，$x \in \overline{A \cap B}$.

证毕.

# 集合恒等式的证明

**证明** ***(证明 2).***

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{by definition of complement} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{by definition of does not belong symbol} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{by definition of intersection} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{by the first De Morgan law for propositions} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && \text{by definition of does not belong symbol} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{by definition of complement} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{by definition of union} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{by meaning of set builder notation}
\end{aligned}
$$

# 集合恒等式的证明

**例子 *3.2 (Distributive laws).*** 证明 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**证明.**

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B \cap C)\} && \text{by definition of union} \\
&= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)\} && \text{by definition of intersection} \\
&= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} && \text{by the distributive law for prop.} \\
&= \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)\} && \text{by definition of union} \\
&= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\} && \text{by definition of intersection}
\end{aligned}
$$

# 使用集合恒等式进行证明

在下面的例子，我们使用已经建立的集合恒等式证明或化简更一般的集合等式.

**例子 *3.3.*** 令 $A, B, C$ 为集合，证明 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$.

**证明*.***

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) && \text{by the first De Morgan law} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{by the second De Morgan law} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{by the commutative law} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{by the commutative law}
\end{aligned}
$$

# 使用集合恒等式进行证明

**例子 *3.4.*** 化简 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

根据吸收律有,

$$
\begin{aligned}
&((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A),\\
&= (A \cup B) - A,\\
&= B - A.
\end{aligned}
$$

# 其他集合等式

**定义** ***3.1.*** 特征函数（indicator function）$\chi : U \mapsto \{0, 1\}$，令 $A \subseteq U$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- $\chi_A = \chi_B$ 当且仅当 $A = B$.
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.
- $\chi_{A \oplus B} = \chi_A +_2 \chi_B$，其中 $+_2$ 定义为模 2 加法运算[2].

[2]即 $a +_2 b \triangleq (a + b) \pmod 2$.

# 其他集合等式

**例子 *3.5.*** 集合的对称差运算满足结合律：$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

**证明.** 由于 $A = B \iff \chi_A = \chi_B$，故只需证明 $\chi_{(A\oplus B)\oplus C} = \chi_{A\oplus(B\oplus C)}$.

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\oplus B)\oplus C} &= \chi_{(A\oplus B)} +_2 \chi_C \\
&= \chi_A +_2 \chi_B +_2 \chi_C \\
&= \chi_A +_2 (\chi_B +_2 \chi_C) \\
&= \chi_A +_2 \chi_{B\oplus C} \\
&= \chi_{A\oplus(B\oplus C)}.
\end{aligned}$$

其中，我们使用了模 2 加法运算的结合律.

# 其他集合等式

**例子 *3.6.*** 已知：$A \oplus B = A \oplus C$，求证 $B = C$.

**证明.** 由于 $A \oplus B = A \oplus C$，故 $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$.

$$
\begin{aligned}
& A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C) \\
& \Rightarrow (A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C && \text{associativity of set } \oplus \\
& \Rightarrow \emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C && \text{definition of set } \oplus \\
& \Rightarrow B = C.
\end{aligned}
$$

# 集合计数

# 容斥原理（inclusion-exclusion principle）

1. 令 $A_1, A_2$ 为集合，从 Venn 图可以观察到如下结论：

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

2. 对于三个集合 $A_1, A_2, A_3$，可以的到：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

3. 该结论可以推广至 $n$ 个集合，

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|, \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.\end{aligned}$$

# 容斥原理（inclusion-exclusion principle）

**定理 *4.1* (容斥原理).** 令 $U$ 为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为其子集，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|,$$

**推论 *4.1*.** 令 $U$ 为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为其子集，则

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |U| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \quad 1 \le i_1, i_k \le n.$$

***证明.*** 使用定理证明，留作练习.

**例子 *4.1.*** 求 1 到 1000（包含 1 和 1000）不能被 5，6，8 三个数整除的整数个数.

定义如下集合，

$$
\begin{aligned}
U &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 1000\}, \\
A_1 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod 5\}, \\
A_2 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod 6\}, \\
A_3 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod 8\}.
\end{aligned}
$$

问题所求数即为 $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$.

$|A_1| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$, $|A_2| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$, $|A_3| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$,

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 1000/\operatorname{lcm}(5,6) \rfloor = 33$, $|A_1 \cap A_3| = \lfloor 1000/\operatorname{lcm}(5,8) \rfloor = 25$,

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/\operatorname{lcm}(6,8) \rfloor = 41$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/\operatorname{lcm}(5,6,8) \rfloor = 8$.

根据推论4.1，$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$.

**例子 *4.2.*** 欧拉函数 $\phi(n)$ 表示 $1, 2, \ldots, n-1$ 中与 $n$ 互素数的个数，定义 $\phi(1) = 1$. 由于与 12 互素的数有 $1, 5, 7, 11$，故 $\phi(12) = 4$；同理，$\phi(13) = 12$. 假定整数有如下素因子分解

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

试计算 $\phi(n)$ 的通项公式.

定义如下集合，

$$U = [n-1],$$
$$A_i = \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod{p_i}\}$$

则 $\phi(n) = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_k|$.

$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1 \leq i \leq k.$

$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leq i << n.$

$\ldots$

根据推论4.1，

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).
\end{aligned}
$$

**实例**：

- $\phi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16.$
- 与 60 互素的正整数有：$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.$

- 在计算机的算法设计与分析中，我们经常会碰到递推关系（recurrence relations），

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0.$$

- 被称为线性齐次递推（linear homogeneous recurrence）关系.
- Fibonacci 序列 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0, f_1 = 1$，如何计算其通项 $f_n$?

# 组合计数（选学）

- 线性齐次递推关系可以转化为矩阵表示，以 Fibonacci 序列为例，

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

- 令变换矩阵为 $\mathbf{A}$，则我们仅需计算出 $\mathbf{A}^n$，如何快速计算 $\mathbf{A}^n$?
- 回忆矩阵 eigenvector 和 eigenvalue 的定义，$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
- 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 存在两个线性独立的 eigenvectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$，则矩阵可以对角化.

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{AP} = \mathbf{PD}$$

- $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$.

- 求解特征方程（characteristic equation）. 令 $f_n = r^n$，带入 Fibonacii 递推关系，

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}.$$

- 假设 $r \neq 0$，则有

$$r^2 = r + 1 \iff r^2 - r - 1 = 0.$$

- 特征方程存在根 $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$. 由递推关系的线性可知，

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- 使用初始条件 $f_0 = 0, f_1 = 1$ 计算出系数 $\alpha_1, \alpha_2$.

# 组合计数（选学）

- 生成函数（generating function）是复杂组合计数问题的有效求解工具（通用、简洁）.
- 阅读推荐教材第 8 章，Advanced Counting Techniques.
- 生成函数与复数，
  - Find the number of subsets of $\{1, 2, ..., 2000\}$, the sum of whose elements is divisible by $5$.
  - 3Blue1Brown Olympiad level counting.
- 生成函数专著 generatingfunctionology.

# 作业

指定教材习题 6.

- 4
- 8-(4), 8-(5), 8-(6)
- 9-(5)
- 15-(2)
- 18-(4)
- 21
- 30-(3), 30-(4)
- 35