数理逻辑

李修成

计算机科学与技术学院

Outline

1. 命题逻辑的基本概念

命题与其表示

- 命题（proposition）是一个可以判断真伪的声明式语句（declarative sentence），
- 其要么为真，要么为假，不能既真也假.
- 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题.
- 陈述句中的悖论，判断结果不惟一确定的不是命题.

例子 1.1 (命题).

- 北京是中国的首都.
- $1+1=2$.
- $2+2=3$.
- 2025 年元旦深圳下大雪.

例子 1.2 (非命题).

- 现在是几点?
- 请把门打开.
- $x+1=2$.

命题与其表示

- 我们通常用字母 $p, q, r, s, \ldots$ 来表示命题.
- 如果一个命题为真命题，我们称其真值（truth value）为真，记为 1.
- 如果一个命题为假命题，我们称其真值（truth value）为假，记为 0.
- 如果一个命题不能被更简单的命题来表示，则称其为原子命题.
- 可以用逻辑联结词将几个原子命题联结起来构成复合命题：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

定义 *1.1.* 令 p 为命题，命题的否定式（negation），“not p”，记作 $\neg p$. $\neg p$ 的真值为命题 p 真值的取反.

- p : Tom's PC runs Linux; $\neg p$: Tom's PC does not run Linux.
- $p : 1+1=2$; $\neg p : 1+1\neq 2$.

定义 1.2. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的合取式（conjunction）为命题 "p and q"，记作 $p \wedge q$. $p \wedge q$ 为真当 p, q 同时为真，否则为假.

定义 1.3. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的析取式（disjunction）为命题 "p or q"，记作 $p \vee q$. $p \vee q$ 为假当 p, q 同时为假，否则为真.

我们可以用一个表来枚举命题真值的各种可能，该表被称为真值表（truth table）.

合取式真值表		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

析取式真值表		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例子 *1.3.* 将下列命题符号化.

1. 吴颖既用功又聪明.
2. 吴颖不仅用功而且聪明.
3. 吴颖虽然聪明，但不用功.
4. 张辉与王丽都是三好生.
5. 张辉与王丽是同学.

令 p 表示“吴颖用功”，q 表示“吴颖聪明”.

1. $p \wedge q$.
2. $p \wedge q$.
3. $\neg p \wedge q$.

令 p 表示“张辉是三好生”，q 表示“王丽是三好生”，r 表示“张辉与王丽是同学”.

4. $p \wedge q$.
5. r.

例子 ***1.4.*** 将下列命题符号化.

1. 2 或 4 是素数.
2. 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
3. 王小红生于 1975 年或 1976 年.

1. 令 p 表示 “2 是素数”，q 表示 “4 是素数”，$p \vee q$.
2. 令 p 表示 “小元元拿一个苹果”，q 表示 “小元元拿一个梨”，$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.
3. 令 p 表示 “王小红生于 1975 年”，q 表示 “王小红生于 1976 年”，$p \vee q$.

- (1) 为相容或.
- (2)-(3) 为排斥或，符号化时 (3) 可有两种形式，而 (2) 则不能.

定义 *1.4.* 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的异或命题（exclusive or）为真当且仅当 p, q 其中一个为真另一个为假，否则命题为假，记作 $p \oplus q$.

定义 *1.5.* 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的蕴含式（conditional statement）定义为 “if p, then q”，记为 $p \to q$. p 称为蕴含式的前件，q 称为蕴含式后件. 条件语句 $p \to q$ 只有当 p 为真 q 为假时为假，其他情况都为真，尤其是若 p 为假，q 恒为真.

异或真值表

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

蕴含式真值表

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

命题与其表示

- 条件语句 $p \to q$ 在自然语言中有多种表达，
- if p then q, q if p, q when p, p only if q, q unless $\neg p$.
- p is sufficient for q, q is a necessary condition for p.

例子 *1.5.*

- "If I am elected, then I will lower taxes."
- "I will lower taxes when I am elected."
- "I will lower taxes unless I am not elected."

- 条件语句 $p \to q$ 的常见中文表达，
- p 仅当 q，只有 q 才 p，除非 q 才 p，除非 q 否则非 p.
- 只有"仅当"从左向右，其余三个都是从右向左.

例子 *1.6.* 令 p 表示“天冷”，q 表示“小王穿羽绒服”，将下列命题符号化.

(1) 只要天冷，小王就穿羽线服.
(2) 因为天冷，所以小王穿羽线服.
(3) 若小王不穿羽线服，则天不冷.
(4) 如果天不冷，则小王不穿羽线服.
(5) 只有天冷，小王才穿羽线服.
(6) 除非天冷，小王才穿羽线服.
(7) 除非天冷，否则小王不穿羽绒服.
(8) 小王穿羽线服仅当天冷的时候.

命题与其表示

令 p 表示“天冷”，q 表示“小王穿羽绒服”，将下列命题符号化.

(1) 只要天冷，小王就穿羽线服. $p \to q$
(2) 因为天冷，所以小王穿羽线服. $p \to q$
(3) 若小王不穿羽线服，则天不冷. $\neg q \to \neg p$
(4) 如果天不冷，则小王不穿羽线服. $\neg p \to \neg q$
(5) 只有天冷，小王才穿羽线服. $q \to p$
(6) 除非天冷，小王才穿羽线服. $q \to p$
(7) 除非天冷，否则小王不穿羽绒服. $q \to p$
(8) 小王穿羽线服仅当天冷的时候. $q \to p$

命题与其表示

给定命题 $p \to q$，其

- 逆命题（converse）为 $q \to p$,
- 否命题（inverse）为 $\neg p \to \neg q$,
- 逆否命题（contrapositive）为 $\neg q \to \neg p$.

一个命题与其逆否命题等价.

定义 *1.6.* 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的等价式（biconditional statement）定义为 “p if and only if q”，记作 $p \leftrightarrow q$. 当 p 与 q 有相同的真值时，命题 $p \leftrightarrow q$ 为真，否则为假.

- $p \leftrightarrow q$ 在英文中的常见表达，
- “p is necessary and sufficient for q”
- “if p then q, and conversely”
- “p iff q”, “p exactly when q”

等价式真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- 命题常项：真值确定的简单命题.
- 命题变项：取值不确定的简单命题.

定义 ***1.7.*** 将命题变项用联结词和括号联结起来的符号串称作合式公式（简称公式），其递归定义如下：

1. 单个命题变项是合式公式, 称作原子命题公式.
2. 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是.
3. 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 也是.
4. 有限次地应用 (1)—(3) 形成的符号串是合式公式.

定义 *1.8 (公式的层次).*

1. 若公式 A 是单个命题变项, 则称 A 为 0 层公式.
2. 称 A 是 $n+1\,(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一:
   (a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式;
   (b) $A=B\wedge C$, 其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n=\max(i,j)$;
   (c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同 (b);
   (d) $A=B\rightarrow C$, 其中 B,C 的层次及 n 同 (b);
   (e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中 B,C 的层次及 n 同 (b).
3. 若公式 A 的层次为 k, 则称 A 为 k 层公式.

公式 $\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$, $((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$ 的层次分别为 3 和 4.

命题公式及其赋值

定义 *1.9.* 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，

- 给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个赋值或解释.
- 若指定的一组值使 A 为 1，则称这组值为 A 的成真赋值；
- 若使 A 为 0，则称这组值为 A 的成假赋值.

给定公式公式 $\neg(p \to q) \leftrightarrow r$,

- 其成真赋值为 $000, 010, 101, 110$.
- 其成假赋值为 $001, 011, 100, 111$.
- 含 n 个命题变项的公式有 2^n 个赋值.

例子 *1.7.* 构造 $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 的真值表.

思路：这是一个条件命题，条件和结论分别是合取式和析取式，合取式里面又带有否定命题. 因此，我们可以从 p, q 出发，从里向外，先构造否定命题，然后构造析取式和合取式，最后是条件命题.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0

合式公式的真值表

思路：考虑 p,q 的 2^n 中赋值.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

合式公式的真值表

例子 *1.8.* 构造 $(q \to p) \wedge q \to p$ 和 $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表.

p	q	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$(q \to p) \wedge q \to p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

合式公式的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

定义 *1.10 (公式类型)*.

1. 若 A 在它的任何赋值下均为真，则称 A 为重言式或永真式;
2. 若 A 在它的任何赋值下均为假，则称 A 为矛盾式或永假式;
3. 若 A 不是矛盾式，则称 A 是可满足式.

由例子 1.7和 1.8可知，

- $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 为可满足式.
- $(q \to p) \wedge q \to p$ 为永真式.
- $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 为矛盾式.

逻辑运算符的优先级

- 通过例子1.7，我们可以总结出如下逻辑算符优先级（precedence），
- “否定”优先于“与或”优先于“条件”．

逻辑算符优先级	
Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

2. 命题逻辑等值演算

定义 *2.1.* 若公式 A, B 具有相同的真值，则称 A 与 B 等值，记为 $A \Leftrightarrow B$，并称 $A \Leftrightarrow B$ 是等值式.

例子 *2.1.* 使用真值表验证 $\neg p \vee q \Leftrightarrow p \to q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

例子 *2.2.* 判断如下各组公式是否等值.

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$.

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$.

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$.

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

定理 ***2.1 (De Morgan Laws).***

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

证明. 使用真值表验证 $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

基本等值式

No.	Equivalence	Name
1	$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identity laws 同一律
2	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Domination laws 支配律
3	$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotent laws 幂等律
4	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Double negation law 双重否定

(1)

基本等值式

No.	Equivalence	Name
5	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutative laws 交换律
6	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws 结合律
7	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws 分配律
8	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
9	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorption laws 吸收律
10	$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$	排中律 矛盾律

(2)

基本等值式

除此外还有如下常用等值式：

No.	Equivalence	Name
11	$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	蕴涵等值式
12	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$	等价等值式
13	$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	假言易位式
14	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$	等价否定等值式
15	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$	归谬论

(3)

等值演算举例

例子 2.3. 证明 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$.

$$
\begin{aligned}
p \to (q \to r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{(结合律)} \\
&\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r && \text{(De Morgan 律)} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r && \text{(蕴涵等值式)}
\end{aligned}
$$

等值演算举例

例子 *2.4.* 证明 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$ 不等值.

本题可以使用真值表进行验证. 现使用真值演算证明. 注意到,

$$
\begin{aligned}
&p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r \\
&(p \to q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r,
\end{aligned}
$$

而 000 为 $\neg p \vee \neg q \vee r$ 的成真赋值, 为 $(p \wedge \neg q) \vee r$ 的成假赋值.

等值演算举例

例子 *2.5.* 使用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $q \wedge \neg(p \to q)$.

(2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$.

对于 (1)

$$\begin{aligned}
q \wedge \neg(p \to q) &\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) && \text{(De Morgan 律)} \\
&\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) && \text{(结合律与交换律)} \\
&\Leftrightarrow p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 && \text{(矛盾律)}
\end{aligned}$$

故为矛盾式.

等值演算举例

对于 (2)

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p) &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) && \text{(交换律)} \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

故为重言式.

对于 (3)

$$
\begin{aligned}
((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r &\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r && \text{(排中律)} \\
&\Leftrightarrow p \wedge r && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

故为可满足式.

析取范式与合取范式

- 文字：命题变项及其否定的总称.
- 简单析取式：有限个文字构成的析取式. 如 $p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r$.
- 简单合取式：有限个文字构成的合取式. 如 $p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r$.
- 析取范式：由有限个简单合取式组成的析取式. 如
  $$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r).$$
- 合取范式：由有限个简单析取式组成的合取式. 如
  $$(p \vee q \wedge \neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r).$$
- 范式：析取范式与合取范式的总称.

- 单个文字 p, q 既是简单析取式，又是简单合取式.
- 形如 $p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式.

范式的性质

命题 *2.1.*

1. 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.
2. 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

命题 *2.2.*

1. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.
2. 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

定理 *2.2 (范式存在定理).* 任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

命题公式的范式

求公式 A 范式的步骤：

1. 消去 A 中的 $\to, \leftrightarrow$ (若存在).

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B).$$

2. 否定联结词 $\neg$ 的内移或消去.

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A,$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

3. 使用分配律.

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

上述步骤得到的范式可能不唯一.

求公式的范式

例子 *2.6.* 求下列公式的析取范式与合取范式.

1. $(p \to \neg q) \vee \neg r$.
2. $(p \to \neg q) \to r$.

(1)

$$\begin{aligned}(p \to \neg q) \vee \neg r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad &(\text{消去} \to)\\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad &(\text{结合律})\end{aligned}$$

最后结果既是析取范式 (由 3 个简单合取式组成的析取式)，又是合取范式 (由一个简单析取式组成的合取式).

例子 *2.7.* 求下列公式的析取范式与合取范式.

1. $(p \to \neg q) \vee \neg r$.
2. $(p \to \neg q) \to r$.

(2)

$$\begin{aligned}
(p \to \neg q) \to r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \to r && \text{(消去 }\to\text{)} \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{(消去 }\to\text{)} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r && \text{(否定内移)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) && \text{(分配律)}
\end{aligned}$$

定义 2.2. 在含有 n 个命题变项的简单合取式 (简单析取式) 中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个文字出现在左起第 i 位上 $(1 \leq i \leq n)$，称这样的简单合取式 (简单析取式) 为极小项 (极大项).

- n 个命题变项有 2^n 个极小项和 2^n 个极大项.
- 2^n 个极小项（极大项）均互不等值.
- 用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示.
- 用 M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示.
- m_i (M_i) 称为极小项 (极大项) 的名称.

极小项与极大项

两个命题变项 p, q 的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	00	m_0	$p \vee q$	00	M_0
$\neg p \wedge q$	01	m_1	$p \vee \neg q$	01	M_1
$p \wedge \neg q$	10	m_2	$\neg p \vee q$	10	M_2
$p \wedge q$	11	m_3	$\neg p \vee \neg q$	11	M_3

极小项与极大项

三个命题变项 p, q, r 的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	000	m_0	$p \vee q \vee r$	000	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	001	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	001	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	010	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	010	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	011	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	011	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	100	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	100	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	101	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	101	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	110	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	110	M_6
$p \wedge q \wedge r$	111	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	111	M_7

- 极小项，命题变项编码为 1；极大项，命题变项编码为 0.
- m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$.

主析取范式与主合取范式

- 主析取范式：由极小项构成的析取范式.
- 主合取范式：由极大项构成的合取范式.

$n=3$，命题变项为 p, q, r 时，

- $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$，主析取范式.
- $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_7$，主合取范式.

定理 2.3 (主范式的存在惟一定理). 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是惟一的.

求公式主析取范式的步骤

设公式 A 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，按如下步骤计算主析取范式

1. 求 A 的析取范式 $A' = B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_s$，其中 B_j 是简单合取式，$j = 1, 2, \ldots, s$.
2. **(改造简单合取式)** 若某个 B_j 既不含 p_i，又不含 $\neg p_i$，则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

   重复这个过程，直到所有简单合取式都是长度为 n 的极小项为止.
3. 消去重复出现的极小项，即用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$.
4. 将极小项按下标从小到大排列.

求公式主合取范式的步骤

设公式 A 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，按如下步骤计算主合取范式

1. 求 A 的合取范式 $A' = B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$，其中 B_j 是简单析取取式，$j = 1, 2, \ldots, s$.
2. **(改造简单析取式)** 若某个 B_j 既不含 p_i，又不含 $\neg p_i$，则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

   重复这个过程，直到所有简单析取式都是长度为 n 的极大项为止.
3. 消去重复出现的极大项，即用 M_i 代替 $M_i \wedge M_i$.
4. 将极大项按下标从小到大排列.

例子 2.8. 求公式 $A = (p \to \neg q) \to r$ 的主析取范式和主合取范式.

$$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{析取范式}). \tag{4}$$

$$\begin{aligned} p \wedge q &\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow m_6 \vee m_7. \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} r &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7. \end{aligned} \tag{6}$$

将 Eq. 5, 6代入 Eq. 4并排序得，$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$.

主析取范式与主合取范式

$$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\text{合取范式}). \tag{7}$$

$$\begin{aligned} p \vee r &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} q \vee r &\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ &\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4. \end{aligned} \tag{9}$$

将 Eq. 8, 9代入 Eq. 7并排序得，$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$.

主范式的应用

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值.

- 设公式 A 含 n 个命题变项，A 的主析取范式有 s 个极小项，
- 则 A 有 s 个成真赋值，它们是极小项下标的二进制表示，其余为成假赋值.
- 在极小项中，命题变项否定被编码为 0，但赋值时操作的为变项.

- 例如 $(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$.
- 成真赋值为 $001, 011, 101, 110, 111$,
- 成假赋值为 $000, 010, 100$.
- 类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

(2) 判断公式的类型.

- 设 A 含 n 个命题变项.
- A 为重言式 $\Leftrightarrow$ A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项,
  $\Leftrightarrow$ A 的主合取范式不含任何极大项，记为 1.
- A 为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A 的主合取范式含全部 2^n 个极大项,
  $\Leftrightarrow$ A 的主析取范式不含任何极小项，记为 0.
- A 为非重言式的可满足式
  $\Leftrightarrow$ A 的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项,
  $\Leftrightarrow$ A 的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例子 ***2.9.*** 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q$.

(2) $B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q)$.

(3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$.

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3)

$$
\begin{aligned}
C \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
\Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{非重言式的可满足式.}
\end{aligned}
$$

主范式的应用

(3) 判断两个公式是否等值.

例子 *2.10.* 用主析取范式判以下每一组公式是否等值.

- $p \to (q \to r)$ 与 $(p \land q) \to r$ 与 $(p \to q) \to r$.

$$
\begin{aligned}
p \to (q \to r) &= m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_7 \\
(p \land q) \to r &= m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_7 \\
(p \to q) \to r &= m_1 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_7 .
\end{aligned}
$$

(4) 解实际问题.

例子 *2.11.* 某单位要从 A, B, C 三人中选派若干人出国考察，需满足下述条件，

(1) 若 A 去，则 C 必须去;

(2) 若 B 去，则 C 不能去;

(3) A 和 B 必须去一人且只能去一人.

有几种选派方案.

记 p : 派 A 去，q : 派 B 去，r : 派 C 去.

(1) $p \to r$ (2) $q \to \neg r$ (3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

求下式的成真赋值，$A = (p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$.

主范式的应用

求 A 的主析取范式.

$$
\begin{aligned}
A = & (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) && (10) \\
\Leftrightarrow & \underset{\sim\sim\sim}{(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)} \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) && (11) \\
\Leftrightarrow & \underset{\sim\sim\sim}{((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q) \vee \color{red}{(r \wedge \neg r)})} \wedge \underline{((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))} && (12) \\
\Leftrightarrow & ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) && (13) \\
& \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee \color{blue}{((\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg p \wedge q))} && (14) \\
& \vee \color{blue}{((r \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q))} \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) && (15) \\
\Leftrightarrow & \color{blue}{(\neg p \wedge q \wedge \neg r)} \vee \color{blue}{(p \wedge \neg q \wedge r)} && (16)
\end{aligned}
$$

成真赋值: $010, 101$.

由主析取范式确定主合取范式

例子 2.12. 设 A 有 3 个命题变项，且已知 $A = m_1 \vee m_3 \vee m_7$，求 A 的主合取范式.

主析取范式中出现的极小项对应成真赋值，没有出现的项为成假赋值，而成假赋值恰好对应主合取范式中出现的极大项，故有

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6.$$

联结词的完备集

定义 *2.3.* 称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

- 函数定义域大小为 2^n，值域大小为 2.
- 故共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

1 元真值函数.

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

真值函数

2 元真值函数.

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- 任何含 n 个命题变项的命题公式 A (长度 2^n 布尔向量) 都对应惟一的 n 元真值函数 F.
- 等值的公式对应的真值函数相同. 比如, $p \to q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$.

联结词完备集

定义 2.4. 设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词完备集.

若 S 是联结词完备集，则任何命题公式都可由 S 中的联结词表示.

命题 2.3. $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集.

联结词完备集

推论 *2.1.* 以下都是联结词完备集.

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \to\}$
(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$
(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$
(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$
(5) $S_5 = \{\neg, \to\}$

证明.

(1) (2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集.
(3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.
(4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$.
(5) $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \to B$，及 (4).

- $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集，0 不能用它表示它的子集.
- 其子集 $\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\to\}, \{\leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \to\}$ 等都不是.

复合联结词

定义 2.5. 设 p, q 为两个命题，

- $\neg(p \wedge q)$ 称作 p 与 q 的与非式，记作 $p \uparrow q$, 即 $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$.
- $\uparrow$ 称为与非联结词 $\neg(p \vee q)$.
- $\neg(p \vee q)$ 称作 p 与 q 的或非式，记作 $p \downarrow q$, 即 $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$.
- $\downarrow$ 称为或非联结词.

命题 2.4. $\{\uparrow\}$ 与 $\{\downarrow\}$ 为联结词完备集.

证明. 只需证 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 可以被 $\{\uparrow\}$ 或 $\{\downarrow\}$ 表示.

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

故 $\{\downarrow\}$ 为联结词完备集. $\{\uparrow\}$ 证明类似.

作业

习题 1.

- 3，4，27.

习题 2.

- 4，6，11，12，13，15，18.

3. 命题逻辑的推理

定义 *3.1.* 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ 为命题公式. 若对于每一组赋值, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假, 或当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为真时, B 也为真, 则称由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理是有效的或正确的, 并称 B 是有效结论.

- 由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理是否正确, 与诸前提的排列顺序无关.
- 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ 共出现 n 个命题变项, 对于任一组赋值 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ($\alpha_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, \ldots, n$), 前提和结论的取值情况有以下 4 种:
  (1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 $0, B$ 为 0.
  (2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 $0, B$ 为 1.
  (3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 $1, B$ 为 0.
  (4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 $1, B$ 为 1.

推理的形式结构

命题 *3.1.* 由命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$ 为重言式.

- 推理正确不能保证结论一定正确.

推理的形式结构

推理的形式结构.

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$;
   若推理正确，记为 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$.
2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$;
   若推理正确，记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.
3. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$；结论: B.

判断推理是否正确的方法:

- 真值表法.
- 等值演算法.
- 主析取范式法.

例子 3.1. 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是 1 号，则明天是 5 号. 今天是 1 号. 所以，明天是 5 号.

(2) 若今天是 1 号，则明天是 5 号. 明天是 5 号. 所以，今天是 1 号.

设 p：今天是 1 号，q：明天是 5 号.

(1) 推理的形式结构: $(p \to q) \wedge p \to q$. 用等值演算法

$$\begin{aligned}(p \to q) \wedge p \to q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \\ &\Leftrightarrow 1.\end{aligned}$$

推理实例

(2) 推理的形式结构: $(p \to q) \wedge q \to p$. 用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge q \to p &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p \\
&\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p \\
&\Leftrightarrow \neg q \vee p \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3.
\end{aligned}
$$

推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

1.	$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2.	$(A \wedge B) \Rightarrow A, \quad (A \wedge B) \Rightarrow B$	化简律
3.	$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
4.	$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5.	$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6.	$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
7.	$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
8.	$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难 构造性二难 (特殊形式)
9.	$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

- Eq. 1, 2, 3 中的每个等值式可产生两个推理定律，如
- 由 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$.

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$.

$$
\begin{aligned}
& A \to (A \vee B) \\
\Leftrightarrow & \neg A \vee (A \vee B) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee A) \vee B \quad \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow & 1.
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

2. $(A \wedge B) \Rightarrow A, \quad (A \wedge B) \Rightarrow B.$

$$
\begin{aligned}
& (A \wedge B) \rightarrow A \\
\Leftrightarrow & \neg(A \wedge B) \vee A && (\text{蕴含等值式}) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee \neg B) \vee A && (\text{德摩根律}) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee A) \vee \neg B && (\text{结合律、交换律}) \\
\Leftrightarrow & 1.
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$.

$$
\begin{aligned}
&(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B \\
\Leftrightarrow &\neg((\neg A \vee B) \wedge A) \vee B && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow &(A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee B && \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow &(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee B) && \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow &(A \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee B) && \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow &1.
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$.

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \wedge \neg B \to \neg A \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \vee \neg A && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee B \vee \neg A && \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A) && \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A) && \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & 1.
\end{aligned}
$$

5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$.

$$
\begin{aligned}
& (A \vee B) \wedge \neg B \to A \\
\Leftrightarrow & \neg((A \vee B) \wedge \neg B) \vee A && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee B \vee A && \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee A) && \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg B \vee B \vee A) && \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & 1.
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$.

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C) & \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C) & \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C) & \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee ((B \wedge \neg C) \vee \underline{(\neg A \vee C)}) & \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee C)) & \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee \underline{(B \vee \neg A \vee C)} & \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee \neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A \vee C) & \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & 1. &
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

$$
\begin{aligned}
& (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C) \\
\Leftrightarrow & \neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)) \vee ((A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)) && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow & \underline{\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A) \vee \neg(B \rightarrow C) \vee \neg(C \rightarrow B)} \vee \underline{((A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A))} && \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow & (\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A) \vee \neg(B \rightarrow C) \vee \neg(C \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)) \\
& \wedge(\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A) \vee \neg(B \rightarrow C) \vee \neg(C \rightarrow B) \vee (C \rightarrow A)) && \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & (((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \vee \neg(B \rightarrow A) \vee \neg(C \rightarrow B)) \\
& \wedge (((B \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)) \vee \neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow C)) && \text{(交换律、结合律)} \\
\Leftrightarrow & (1 \vee \neg(B \rightarrow A) \vee \neg(C \rightarrow B)) \wedge (1 \vee \neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow C)) \\
\Leftrightarrow & 1.
\end{aligned}
$$

8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$,
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$.

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \to (B \vee D) & \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (A \vee C)) \vee (B \vee D) & (\text{蕴含等值式}) \\
\Leftrightarrow & ((A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C)) \vee (B \vee D) & (\text{德摩根律}) \\
\Leftrightarrow & ((A \wedge \neg B) \vee (B \vee D)) \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C) & (\text{结合律}) \\
\Leftrightarrow & ((A \vee B \vee D) \wedge (\neg B \vee B \vee D)) \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C) & (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow & ((A \vee B \vee D \vee C) \wedge (A \vee B \vee D \vee \neg D)) \vee (\neg A \wedge \neg C) & (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee D \vee C) \vee (\neg A \wedge \neg C) & (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee D \vee C \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee D \vee C \vee \neg C) & (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow & 1. &
\end{aligned}
$$

推理定律——重言蕴涵式

8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$,
   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$.

令 $C = \neg A, D = B$，并带入一般形式可得特殊形式.

推理定律——重言蕴涵式

9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$.

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \to (\neg A \vee \neg C) & \\
\Leftrightarrow & \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D)) \vee (\neg A \vee \neg C) & \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow & ((A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) \vee (B \wedge D)) \vee (\neg A \vee \neg C) & \text{(德摩根律)} \\
\Leftrightarrow & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee \neg C) \vee (C \wedge \neg D) \vee (B \wedge D) & \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow & ((A \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C)) \vee (C \wedge \neg D) \vee (B \wedge D) & \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & ((\neg B \vee \neg A \vee \neg C \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C \vee \neg D)) \vee (B \wedge D) & \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & (\neg B \vee \neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee B) \vee (\neg B \vee \neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee D) & \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow & 1. &
\end{aligned}
$$

定义 *3.2.* 一个形式系统 I 由下面四个部分组成:

1. 非空的字母表 $A(I)$.
2. 字母表中符号构造的合式公式集 $E(I)$.
3. 一些特殊公式组成的公理集 $A_X(I) \subseteq E(I)$.
4. 推理规则集 $R(I)$.

记 $I = \langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$，其中 $\langle A(I), E(I)\rangle$ 是 I 的形式语言系统，$\langle A_X(I), R(I)\rangle$ 是 I 的形式演算系统.

- 自然推理系统: 从任意给定前提出发应用推理规则进行推演.
- 公理推理系统: 从给定的若干条公理出发应用推理规则进行推演.

自然推理系统 P

定义 ***3.3.*** 自然推理系统 P 定义如下:

(1) 字母表

1. 命题变项符号: $p_i, q_i, r_i, \ldots$
2. 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. 括号与逗号: $(,), ,$

(2) 合式公式，定义 1.7.

(3) 推理规则

1. 前提引入规则
2. 结论引入规则
3. 置换规则

自然推理系统 P

(4) 假言推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ A\end{array}}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \lor B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \land B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to C\end{array}}{\therefore A \to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A \lor B\\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \end{array}}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \vee \neg D \end{array}}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\therefore A \wedge B}$$

- 设前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$，结论 B 及公式序列 $C_1, C_2, \ldots, C_\ell$,
- 如果每一个 $C_i\,(1 \leq i \leq \ell)$ 要么是某个 A_j $(1 \leq j \leq k)$,
- 要么可由序列中前面的公式应用推理规则得到，且 $C_\ell = B$,
- 则称公式序列是由 $A_1, A_2, \ldots,$ A_k 推出 B 的证明.

例子 ***3.2.*** 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一，也不是星期三.

在自然推理系统 P 中构造证明

(1) 命题符号化. 令

- p: 明天是星期一, q: 明天是星期三,
- r: 我明天有课, s: 我今天备课.

(2) 写出证明的形式结构

- 前提: $(p \vee q) \to r, r \to s, \neg s$; 结论: $\neg p \wedge \neg q$.

(3) 证明

① $r \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p \vee q) \to r$	前提引入
⑤ $\neg(p \vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p \wedge \neg q$	⑤置换

附加前提证明法

1. 附加前提证明法.

- 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
- 结论： $A \rightarrow B$.

等价的证明

- 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k, A$.
- 结论： B.

$$
\begin{aligned}
& (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow & \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\
\Leftrightarrow & \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\
\Leftrightarrow & (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B
\end{aligned}
$$

例子 ***3.3.*** 构造下面推理的证明.

2 是素数或合数. 若 2 是素数，则 π 是无理数. 若 π 是无理数，则 4 不是素数. 所以，如果 4 是素数，则 2 是合数.

(1) 设 p：2 是素数，$q: 2$ 是合数，$r: \pi$ 是无理数，$s: 4$ 是素数.

(2) 推理的形式结构
- 前提：$p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$.
- 结论：$s \rightarrow q$.

附加前提证明法

- 前提：$p \vee q, p \to r, r \to \neg s$.
- 结论：$s \to q$.

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p \to r$	前提引入
③ $r \to \neg s$	前提引入
④ $p \to \neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p \vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

2. 归谬法.

- 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$.
- 结论：B.

在前提中加入 $\neg B$，推出矛盾.

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B \\
\Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 \\
\Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots . \wedge A_k \wedge \neg B \to 0
\end{aligned}
$$

归谬法（反证法）

例子 *3.4.*

- 前提：$\neg(p \wedge q) \vee r, r \to s, \neg s, p$.
- 结论：$\neg q$.

① q	结论否定引入
② $r \to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p \wedge p$	⑧⑨合取

4. 一阶逻辑基本概念

一阶逻辑

- 个体词：所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体.
- 个体常项：具体的事物，用 a, b, c 等表示.
- 个体变项：抽象的事物，用 x, y, z 等表示.
- 个体域：个体变项的取值范围.
  - 有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$.
  - 无限个体域，如 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$.
  - 全总个体域——由宇宙间一切事物组成.

谓词 (predicate) 是用来刻画个体词性质及个体词之间关系的词. 考虑如下陈述句:

1. $\sqrt{2}$ 是无理数.
2. x 是有理数.

- 在 (1) 中, $\sqrt{2}$ 是个体常项, "是无理数" 为谓词, 整个陈述句可以表示为 $P(\sqrt{2})$;
- 在 (2) 中, x 是个体变项, 整个陈述句可以表示为 $P(x)$;
- 更一般的, $P(x)$ 表示 x 具有性质 P;
- n 元谓词$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足性质 P.
- 不带个体变项的谓词称为 0 元谓词.

例子 *4.1.* 令 $P(x)$ 表示语句 “$x > 3$”. 那么 $P(4)$ 和 $P(2)$ 的真值是什么?

$P(4)$ 和 $P(2)$ 的分别代表陈述 $4 > 3$ 和 $2 > 3$，故 $P(4)$ 为真，$P(2)$ 为假.

例子 *4.2.* 令 $P(x, y)$ 表示语句 “$x = y + 3$”. 那么 $P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的真值是什么?

$P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的分别代表陈述 $1 = 2 + 3$ 和 $3 = 0 + 3$，故 $P(1, 2)$ 为假，$P(3, 0)$ 为真.

定义 4.1 (全称量词). 全称量词（universal quantification）$P(x)$ 为语句，“$P(x)$ for all values of x in the domain.” 记作 $\forall x P(x)$，读作 “for all $xP(x)$”.

例子 4.3. 令 $P(x)$ 表示语句 “$x < x + 1$”, x 的定义域为实数. 那么全称量词 $\forall x P(x)$ 的真值为?

定义 4.2 (存在量词). 存在量词（existential quantification）$P(x)$ 为语句，“There exists an element x in the domain such that $P(x)$.” 记作 $\exists x P(x)$.

例子 4.4. 令 $P(x)$ 表示语句 “$x > 3$”, x 的定义域为实数. 那么量词 $\exists x P(x)$ 的真值为?

- $\forall, \exists$ 比逻辑运算符有更高的优先级.
- 因此 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 表示 $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ 而不是 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$.

- 考虑陈述“每个离散数学课堂上的同学都上过微积分”.
- 令 $P(x)$ 表示“x 上过微积分”，定义域为离散课堂上的学生，$\forall x P(x)$
- 上述陈述的否定 $\neg\forall x P(x)$ 表示什么?
- “存在离散数学课堂上的同学没有上过微积分”.
- 更一般的，我们有

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x).$$

一阶逻辑

- 考虑陈述“离散数学课堂上有同学自学过数学分析”.
- 令 $P(x)$ 表示“x 自学过数学分析”，定义域为离散课堂上的学生，$\exists x P(x)$.
- 上述陈述的否定 $\neg\exists x P(x)$ 表示什么?
- “离散数学课堂上的同学都没自学过数学分析”.
- 更一般的，我们有

$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x).$$

例子 4.5. 陈述句 $\forall x\left(x^2>x\right)$ 和 $\exists x\left(x^2=2\right)$ 的逻辑否定是什么?

- $\neg\forall x\left(x^2>x\right)=\exists x\neg\left(x^2>x\right)=\exists x\left(x^2\leq x\right)$.
- $\neg\exists x\left(x^2=2\right)=\forall x\neg\left(x^2=2\right)=\forall x\left(x^2\neq 2\right)$.

例子 4.6. 证明 $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$ 和 $\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$ 是逻辑等价的.

$$\begin{aligned}
\neg\forall x(P(x)\to Q(x)) &\Leftrightarrow \exists x(\neg(P(x)\to Q(x))) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg P(x)\vee Q(x))) \quad \text{(log. equiv. between $\to$ and $\vee$)} \\
&\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge\neg Q(x)) \quad \text{(De Morgan Laws).}
\end{aligned}$$

例子 *4.7.* 用 0 元谓词将命题符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果 $2 > 3$, 则 $3 < 4$

(1) $F(a)$. 其中, a: 墨西哥, $F(x): x$ 位于南美洲.

(2) $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$. 其中, $F(x): x$ 是无理数, $G(x): x$ 是有理数.

(3) $F(2,3) \to G(3,4)$. 其中, $F(x,y): x > y$, $G(x,y): x < y$.

例子 *4.8.* 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 人都爱美.
(2) 有人用左手写字.

个体域分别为 (a) D 为人类集合，(b) D 为全总个体域.

个体域为 (a)，令 $G(x) : x$ 爱美，$H(x) : x$ 用左手写字，

(1) $\forall x G(x)$.
(2) $\exists x H(x)$.

个体域为 (b)，令 $F(x) : x$ 为人，

(1) $\forall x(F(x) \to G(x))$.
(2) $\exists x(F(x) \wedge H(x))$.

例子 4.9. 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 正数都大于负数.
(2) 有的无理数大于有的有理数.

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域.

(1) 令 $F(x): x$ 为正数，$G(y): y$ 为负数，$L(x,y): x > y$

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow L(x,y)))$$
$$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x,y)).$$

(2) 令 $F(x): x$ 为无理数，$G(y): y$ 为有理数，$L(x,y): x > y$

$$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$$
$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y)).$$

例子 *4.10.* 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 没有不呼吸的人.

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖.

(1) 令 $F(x): x$ 是人，$G(x): x$ 呼吸

$$\neg\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$
$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)).$$

(2) 令 $F(x): x$ 是人，$G(y): y$ 喜欢吃糖

$$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$
$$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x)).$$

例子 4.11. 在一阶逻辑中将下面命题符号化，设个体域为实数域.

(1) 对每一个数 x 都存在一个数 y 使得 $x < y$.

(2) 存在一个数 x 使得对每一个数 y 都有 $x < y$.

令 $L(x, y) : x < y$

(1) $\forall x \exists y L(x, y)$.

(2) $\exists x \forall y L(x, y)$.

定义 4.3. 设 L 是一个非逻辑符号集合，由 L 生成的一阶语言 $\mathcal{L}$ 的字母表包括下述符号.

非逻辑符号：

- L 中的个体常项符号，常用 $a, b, c, \cdots$ 或 $a_i, b_i, c_i, \cdots (i \geqslant 1)$ 表示.
- L 中的函数符号，常用 $f, g, h, \cdots$ 或 $f_i, g_i, h_i, \cdots (i \geqslant 1)$ 表示.
- L 中的谓词符号，常用 $F, G, H, \cdots$ 或 $F_i, G_i, H_i, \cdots (i \geqslant 1)$ 表示.

逻辑符号：

- 个体变项符号: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$.
- 量词符号: $\forall, \exists$.
- 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- 括号与逗号: $(,), ,$.

定义 4.4. $\mathcal{L}$ 的项定义如下:

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数符号, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 n 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

定义 4.5. 设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 的 n 元谓词符号, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $\mathcal{L}$ 的 n 个项, 则称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 的原子公式.

- $a, x, x+y, f(x), g(x, y)$ 都是项.
- $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 均为原子公式.

定义 4.6. $\mathcal{L}$ 的合式公式定义如下 (对比 1.2 中命题合式公式的定义 1.7):

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式.

(3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式.

(4) 若 A 是合式公式, 则 $\forall x A, \exists x A$ 也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用 (1)-(4) 形成的符号串才是合式公式.

- $F(x), F(x) \vee \neg G(x, y), \forall x(F(x) \to G(x))$.
- $\exists x \forall y(F(x) \to G(y) \wedge L(x, y))$.

量词的辖域

定义 *4.7.* 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为指导变元，A 为量词的辖域. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x 的所有出现都称作约束出现，A 中不是约束出现的其他变项均称作自由出现.

例子 *4.12.* $\forall x(F(x,y) \to G(x,z))$.

- x 为指导变元，$(F(x,y) \to G(x,z))$ 为 x 的辖域.
- x 的两次出现均为约束出现，y 与 z 均为自由出现.

例子 *4.13.* $\exists x\,(F\,(x,,y,z) \to \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$.

- $\exists x$ 中 x 为指导变元，$(F\,(x,,y,z) \to \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$ 为辖域.
- $\forall y$ 中 y 为指导变元，$(G(x,y) \wedge H(x,y,z))$ 为辖域.
- x 的三次出现均为约束出现，y 的第一次出现为自由出现，后两次出现为约束出现.
- z 的两次出现均为自由出现.

判断辖域:

- 如果量词后边只是一个原子谓词公式时，该量词的辖域就是此原子谓词公式.
- 如果量词后边是括号，则此括号所表示的区域就是该量词的辖域.
- 如果多个量词紧挨着出现，则后边的量词及其辖域就是前边量词的辖域.

$$\exists x P(x) \wedge B(x)$$
$$\forall x(P(x) \to G(x, y))$$
$$\forall x \exists y(A(x, y) \to B(x, y, z)) \vee C(t).$$

定义 *4.8.* 若公式 A 中不含自由出现的个体变项，则称 A 为封闭的公式，简称闭式.

- $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x, y))$ 为闭式;
- $\exists x(F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式.

公式的解释

定义 ***4.9.*** 设 $\mathcal{L}$ 是由 L 生成的一阶语言, $\mathcal{L}$ 的解释 I 由下面 4 部分组成.

(1) 非空个体域 D_I.

(2) 对每一个个体常项符号 $a \in L$，有一个 $\overline{a} \in D_I$，称 $\overline{a}$ 为 a 在 I 中的解释.

(3) 对每一个 n 元函数符号 $f \in L$，有一个 D_I 上的 n 元函数 $\overline{f}\colon D_I^n \to D_I$，称 $\overline{f}$ 为 f 在 I 中的解释.

(4) 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$，有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 $\overline{F}$, 称 $\overline{F}$ 为 F 在 I 中的解释.

设公式 A，取个体域 D_I，

- 把 A 中的个体常项符号 a，函数符号 f，谓词符号 F
- 分别替换成它们在 I 中的解释 $\overline{a}, \overline{f}, \overline{F}$,

称所得到的公式 A' 为 A 在 I 下的解释.

例子 *4.14.* 给定解释 I:

- 个体域 $D = R$
- $\bar{a} = 0$
- $\bar{f}(x, y) = x + y, \quad \bar{g}(x, y) = x \cdot y$
- $\bar{F}(x, y) : x = y$

写出下列公式在 I 下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists x F(f(x, a), g(x, a)), \qquad \exists x(x + 0 = x \cdot 0)$，真.

(2) $\forall x \forall y(F(f(x, y), g(x, y)) \to F(x, y)), \qquad \forall x \forall y(x + y = x \cdot y \to x = y)$，假.

(3) $\forall x F(g(x, y), a), \qquad \forall x(x \cdot y = 0)$，非命题.

公式的类型

定理 *4.1.* 闭式在任何解释下都是命题.

定义 *4.10 (公式类型).*

- 若公式 A 在任何解释下均为真，则称 A 为永真式 (逻辑有效式).
- 若 A 在任何解释下均为假，则称 A 为矛盾式 (永假式).
- 若至少有一个解释使 A 为真，则称 A 为可满足式.

- 永真式为可满足式，但反之不然.
- 判断公式是否是可满足的 (永真式、矛盾式) 是不可判定的.

定义 4.11. 设 A_0 是含命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的命题公式，A_1，$A_2, \dots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 $A_i\,(1 \le i \le n)$ 处处代替 A_0 中的 p_i, 所得公式 A 称为 A_0 的代换实例.

- $F(x) \to G(x), \forall x F(x) \to \exists y G(y)$ 等都是$p \to q$ 的代换实例.

定理 4.2. 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

例子 4.15. 判断下列公式的类型:

(1) $\forall x F(x) \to (\exists x \exists y G(x, y) \to \forall x F(x))$.
重言式 $p \to (q \to p)$ 的代换实例, 故为永真式.

(2) $\neg(\forall x F(x) \to \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$.
矛盾式 $\neg(p \to q) \wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x) \to G(x))$.
解释 I_1: 个体域 $\mathbb{N}, F(x): x > 5, G(x): x > 4$，公式为真.
解释 I_2: 个体域 $\mathbb{N}, F(x): x < 5, G(x): x < 4$，公式为假.
结论: 非永真式的可满足式.

5. 一阶逻辑等值演算与推理

定义 ***5.1.*** 设 A, B 是两个谓词公式，如果 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \leftrightarrow B$，并称 $A \leftrightarrow B$ 是**等值式**.

基本等值式

第一组

命题逻辑中 16 组基本等值式的代换实例

例子 ***5.1.***

$$\forall x F(x) \to \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y) \text{等}.$$

第二组

(1) 消去量词等值式

设 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

1. $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$.
2. $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$.

基本等值式

(2) 量词否定等值式

1. $\neg\forall x A(x) \iff \exists x \neg A(x)$
2. $\neg\exists x A(x) \iff \forall x \neg A(x)$

(3) 量词域收缩与扩张等值式.
$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的自由出现. 关于全称量词的:

1. $\forall x(A(x) \vee B) \iff \forall x A(x) \vee B$
2. $\forall x(A(x) \wedge B) \iff \forall x A(x) \wedge B$
3. $\forall x(A(x) \to B) \iff \exists x A(x) \to B$
4. $\forall x(B \to A(x)) \iff B \to \forall x A(x)$

基本等值式

关于存在量词的:

1. $\exists x(A(x) \vee B) \iff \exists x A(x) \vee B$
2. $\exists x(A(x) \wedge B) \iff \exists x A(x) \wedge B$
3. $\exists x(A(x) \to B) \iff \forall x A(x) \to B$
4. $\exists x(B \to A(x)) \iff B \to \exists x A(x)$

(4) 量词分配等值式

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \iff \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \iff \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

注意: $\forall$ 对 $\vee$, $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律.

置换规则、换名规则、代替规则

1. 置换规则
   设 $\phi(A)$ 是含 A 的公式，那么，若 $A \iff B$，则 $\phi(A) \iff \phi(B)$.
2. 换名规则
   设 A 为一公式，将 A 中某量词辖域中的个体变项的所有约束出现及相应的指导变项换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为 A'，则 $A \iff A'$.
3. 代替规则
   设 A 为一公式，将 A 中某个个体变项的所有自由出现用 A 中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为 A'，则 $A \iff A'$.

实例

例子 *5.2.* 将下面命题用两种形式符号化，并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

$$\text{令} F(x) : x \text{ 是人，} \; G(x) : x \text{ 犯错误.}$$

$$\neg\exists x(F(x) \land \neg G(x)) \quad \text{或} \quad \forall x(F(x) \to G(x))$$

$$
\begin{aligned}
& \neg\exists x(F(x) \land \neg G(x)) & \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \neg(F(x) \land \neg G(x)) & \text{量词否定等值式} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x(\neg F(x) \lor G(x)) & \text{置换} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x(F(x) \to G(x)) & \text{置换}
\end{aligned}
$$

实例

(2) 不是所有的人都爱看电影

$$\text{令} F(x): x \text{ 是人}, \ G(x): x \text{ 爱看电影}.$$

$$\neg\forall x(F(x) \to G(x)) \quad \text{或} \quad \exists x(F(x) \land \neg G(x))$$

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x) \to G(x)) && \\
\iff &\exists x\neg(F(x) \to G(x)) && \text{量词否定等值式} \\
\iff &\exists x\neg(\neg F(x) \lor G(x)) && \text{置换} \\
\iff &\exists x(F(x) \land \neg G(x)) && \text{置换}
\end{aligned}$$

实例

例子 *5.3.* 将公式化成等值的、不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：
$\forall x(F(x,y,z) \to \exists y G(x,y,z))$

$$\begin{aligned}
&\forall x(F(x,y,z) \to \exists y G(x,y,z)) && \\
\iff\ & \forall x(F(x,y,z) \to \exists t G(x,t,z)) && \text{换名规则} \\
\iff\ & \forall x \exists t(F(x,y,z) \to G(x,t,z)) && \text{辖域扩张等值式}
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
&\forall x(F(x,y,z) \to \exists y G(x,y,z)) && \\
\iff\ & \forall x(F(x,u,z) \to \exists y G(x,y,z)) && \text{代替规则} \\
\iff\ & \forall x \exists y(F(x,u,z) \to G(x,y,z)) && \text{辖域扩张等值式}
\end{aligned}$$

实例

例子 *5.4.* 设个体域 $D = \{a, b, c\}$，消去下述公式中的量词：
(1) $\forall x \exists y(F(x) \to G(y))$

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y(F(x) \to G(y)) \\
\Leftrightarrow & (\exists y(F(a) \to G(y))) \wedge (\exists y(F(b) \to G(y))) \wedge (\exists y(F(c) \to G(y))) \\
\Leftrightarrow & ((F(a) \to G(a)) \vee (F(a) \to G(b)) \vee (F(a) \to G(c))) \\
& \wedge ((F(b) \to G(a)) \vee (F(b) \to G(b)) \vee (F(b) \to G(c))) \\
& \wedge ((F(c) \to G(a)) \vee (F(c) \to G(b)) \vee (F(c) \to G(c))).
\end{aligned}
$$

实例

解法二：

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y(F(x) \to G(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(F(x) \to \exists y G(y)) && \text{辖域收缩等值式} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(F(x) \to (G(a) \lor G(b) \lor G(c))) \\
\Leftrightarrow\ & (F(a) \to (G(a) \lor G(b) \lor G(c))) \\
& \land (F(b) \to (G(a) \lor G(b) \lor G(c))) \\
& \land (F(c) \to (G(a) \lor G(b) \lor G(c))).
\end{aligned}
$$

实例

(2) $\exists x \forall y F(x, y)$

$$
\begin{aligned}
& \exists x \forall y F(x, y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(F(x, a) \wedge F(x, b) \wedge F(x, c)) \\
\Leftrightarrow\ & (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c)) \\
& \quad \vee (F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c)) \\
& \quad \vee (F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c))
\end{aligned}
$$

定义 *5.2.* 设 A 为一阶逻辑公式，若 A 具有如下形式

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_k x_k B$$

则称 A 为前束范式，其中 $Q_i (1 \le i \le k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$, B 为不含量词的公式.

$$\begin{aligned} &\forall x \neg (F(x) \wedge G(x)) \\ &\forall x \exists y (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x,y))) \quad \text{是前束范式.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\neg \exists x (F(x) \wedge G(x)) \\ &\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x,y))) \quad \text{不是前束范式.} \end{aligned}$$

定理 *5.1 (前束范式存在定理)*. 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式.

例子 *5.5*. 求下列公式的前束范式.

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$.

$$
\begin{aligned}
&\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))\quad\text{(量词否定等值式)}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))
\end{aligned}
$$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

求前束范式的实例

(2)$\forall xF(x) \land \neg\exists xG(x)$

$$\begin{aligned}
&\forall xF(x) \land \neg\exists xG(x) \\
&\Leftrightarrow \forall xF(x) \land \forall x\neg G(x) && \text{(量词否定等值式)} \\
&\Leftrightarrow \forall x(F(x) \land \neg G(x)) && \text{(量词分配等值式)}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\forall xF(x) \land \neg\exists xG(x) \\
&\Leftrightarrow \forall xF(x) \land \forall x\neg G(x) && \text{(量词否定等值式)} \\
&\Leftrightarrow \forall xF(x) \land \forall y\neg G(y) && \text{(换名规则)} \\
&\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \land \neg G(y)) && \text{(辖域收缩扩张规则)}
\end{aligned}$$

求前束范式的实例

(3) $\forall x F(x) \to \exists y(G(x,y) \land \neg H(y))$

$$\begin{aligned}
&\forall x F(x) \to \exists y(G(x,y) \land \neg H(y)) && \\
&\Leftrightarrow \forall z F(z) \to \exists y(G(x,y) \land \neg H(y)) && \text{换名规则} \\
&\Leftrightarrow \exists z(\exists y(F(z) \to (G(x,y) \land \neg H(y)))) && \text{辖域收缩扩张规则}
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\forall x F(x) \to \exists y(G(z,y) \land \neg H(y)) && \text{代替规则} \\
&\Leftrightarrow \exists x(\exists y(F(x) \to (G(z,y) \land \neg H(y)))) && \text{辖域收缩扩张规则}
\end{aligned}$$

一阶逻辑的推理理论

一阶逻辑中推理正确的意义：（同命题逻辑推理）从前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 出发推导出结论 B 的形式结构 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ 为永真式. 相应地，推理不正确指其不为永真式.

- 一阶逻辑中，永真式的蕴涵式称为推理定律，即正确的推理.
- 若一个推理的形式结构是推理定律，则这个推理是正确的.
- 推理定律的常见三组来源：

第一组: 命题逻辑推理定律的代换实例. 如：

$$\forall x F(x) \wedge \forall y G(y) \Rightarrow \forall x F(x) \qquad \text{(化简律)}$$

$$\forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \exists y G(y) \qquad \text{(附加律)}$$

第二组: 由基本等值式生成的推理定律.（每个等值式可生成两个推理定律）

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x) \qquad \text{(双否等值式)}$$

$$\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

$$\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$$

$$\neg\forall xF(x) \Leftrightarrow \exists x\neg F(x), \quad \neg\exists xF(x) \Leftrightarrow \forall x\neg F(x) \qquad \text{(量词否定等值式)}$$

$$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$$

$$\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$$

$$\neg\exists xF(x) \Rightarrow \forall x\neg F(x)$$

$$\forall x\neg F(x) \Rightarrow \neg\exists xF(x)$$

第三组: 一些常用的重要推理定律 (记作“量词重要推理定律”)

1. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \implies \forall x(A(x) \vee B(x))$ (附加律 + 代换实例 or 换名 + 辖域扩张等值式 + 化简律)
   - $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \not\Leftarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
   - $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \iff \forall x(A(x) \wedge B(x))$
2. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \implies \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ (化简律 + 代换实例 or 置换规则 +(1) 的逆否)
   - $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
   - $\exists x(A(x) \vee B(x)) \iff \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
3. $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \forall x A(x) \to \forall x B(x)$ (用 (2)+ 假言三段论)
4. $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \exists x A(x) \to \exists x B(x)$ (用 (3)+ 假言三段论)

(1) $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \implies \forall x(A(x) \vee B(x))$

$$
\begin{aligned}
\text{由}\quad \forall x A(x) &\implies \forall x(A(x) \vee B(x)) && \text{(附加律 + 代换实例)}\\
\forall x B(x) &\implies \forall x(A(x) \vee B(x)) && \text{(附加律 + 代换实例)}\\
\text{故}\quad \forall x A(x) \vee \forall x B(x) &\implies \forall x(A(x) \vee B(x)) \vee \forall x(A(x) \vee B(x)) &&\\
&\iff \forall x(A(x) \vee B(x)) && \text{(置换规则)}
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
&\forall x A(x) \vee \forall x B(x) &&\\
\iff & \forall y A(y) \vee \forall x B(x) && \text{(换名规则)}\\
\iff & \forall y(A(y) \vee \forall x B(x)) && \text{(辖域扩张等值式)}\\
\iff & \forall y \forall x(A(y) \vee B(x)) && \text{(辖域扩张等值式)}\\
\implies & \forall x(A(x) \vee B(x)) && \text{(化简律 + 代换实例)}
\end{aligned}
$$

(2) $\exists x(A(x)\land B(x)) \implies \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{由}\quad & \exists x(A(x)\land B(x)) \implies \exists xA(x) && \text{(化简律 + 代换实例)}\\
& \exists x(A(x)\land B(x)) \implies \exists xB(x) && \text{(化简律 + 代换实例)}\\
\text{故}\quad & \exists x(A(x)\land B(x)) \iff (\exists x(A(x)\land B(x)))\land(\exists x(A(x)\land B(x))) && \text{(置换规则)}\\
& \implies \exists xA(x)\land\exists xB(x)
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
& \exists x(A(x)\land B(x))\\
\iff & \neg\neg\exists x(A(x)\land B(x)) && \text{(双否等值式)}\\
\iff & \neg\forall x\neg(A(x)\land B(x)) && \text{(量词否定等值式)}\\
\iff & \neg\forall x(\neg A(x)\lor\neg B(x)) && \text{(置换规则，德摩根定律代换实例)}\\
\implies & \neg((\forall x\neg A(x))\lor(\forall x\neg B(x))) && \text{((1) 的逆否)}\\
\iff & \exists xA(x)\land\exists xB(x) && \text{(置换规则，德摩根定律代换实例)}
\end{aligned}
$$

(3) $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \forall x A(x) \to \forall x B(x)$

$$
\begin{aligned}
& \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \\
\iff & \neg\forall x(\neg A(x) \lor B(x)) \lor (\neg\forall x A(x) \lor \forall x B(x)) && \text{(蕴含等值式)} \\
\iff & \exists x\neg(\neg A(x) \lor B(x)) \lor \exists x\neg A(x) \lor \neg\exists x\neg B(x) && \text{(量词否定等值式)} \\
\iff & \exists x(A(x) \land \neg B(x)) \lor \exists x\neg A(x) \lor \neg\exists x\neg B(x) && \text{(德摩根律代换实例)} \\
\iff & \exists x((A(x) \land \neg B(x)) \lor \neg A(x)) \lor \neg\exists x\neg B(x) && \text{(量词分配等值式)} \\
\iff & \exists x(((A(x) \lor \neg A(x)) \land (\neg B(x) \lor \neg A(x))) \lor \neg\exists x\neg B(x) && \text{(分配律)} \\
\iff & \exists x(\neg A(x) \lor \neg B(x)) \lor \neg\exists x\neg B(x) \\
\iff & \exists x\neg A(x) \lor \exists x\neg B(x) \lor \neg\exists x\neg B(x) \\
\iff & (\exists x\neg B(x) \lor \neg\exists x\neg B(x)) \lor \exists x\neg A(x) && \text{(结合律，交换律)} \\
\iff & 1
\end{aligned}
$$

故 $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \forall x A(x) \to \forall x B(x)$ 是永真式

(4) $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \exists xA(x) \to \exists xB(x)$

由 (3) 知 $\forall x(A(x) \to B(x)) \implies \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

若可证 $\forall xA(x) \to \forall xB(x) \implies \exists xA(x) \to \exists xB(x)$，则由假言三段论知结论成立. 而

$$
\begin{aligned}
& (\forall xA(x) \to \forall xB(x)) \to (\exists xA(x) \to \exists xB(x)) & \\
\iff & \neg(\neg\forall xA(x) \vee \forall xB(x)) \vee (\neg\exists xA(x) \vee \exists xB(x)) & \text{(置换规则)} \\
\iff & (\forall xA(x) \wedge \neg\forall xB(x)) \vee (\neg\exists xA(x) \vee \exists xB(x)) & \text{(德摩根定律代换实例)} \\
\iff & (\forall xA(x) \vee \neg\exists xA(x) \vee \exists xB(x)) \wedge (\neg\forall xB(x) \vee \exists xB(x) \vee \neg\exists xA(x)) & \text{(分配律)} \\
\iff & (\forall xA(x) \vee \forall x\neg A(x) \vee \exists xB(x)) \wedge (\exists x\neg B(x) \vee \exists xB(x) \vee \neg\exists xA(x)) & \text{(量词否定等值式)} \\
\implies & (\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \vee \exists xB(x)) \wedge (\exists x(\neg B(x) \vee B(x)) \vee \neg\exists xA(x)) & \text{(左侧量词重要推理定律，} \\
& & \text{右侧量词分配等值式)} \\
\iff & 1 &
\end{aligned}
$$

消去量词和引入量词规则.

设前提集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$,

第 1 条: 全称量词消去规则 (记为 $\forall-$)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore\ A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore\ A(c)}$$

x, y 为个体变项, c 为个体常项; x 不在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域内出现.

第 2 条: 全称量词引入规则 (记为 $\forall+$)

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \forall x A(x)}$$

y 是个体变项符号, 不在 Γ 的任何公式中自由出现.

第 3 条：存在量词消去规则 (记为 $\exists-$)

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x A(x) \\ A(y) \to B\end{array}}{\therefore B} \quad \text{或} \quad \frac{A(y) \to B}{\therefore \exists x A(x) \to B};$$

y 为个体变项，不在 Γ 的任何公式和 B 中自由出现.

第 4 条：存在量词引入规则 (记为 $\exists+$)

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(y)}{\therefore B \to \exists x A(x)};$$

x, y 为个体变项，A 中 y 不在 $\forall x, \exists x$ 的辖域内自由出现.

一阶逻辑的推理理论

自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 定义：

1. 字母表.
2. 合式公式.
3. 推理规则：

(1) 前提引入规则
(2) 结论引入规则
(3) 置换规则
(4) 假言推理规则
(5) 附加规则
(6) 化简规则
(7) 拒取式规则
(8) 假言三段论规则
(9) 析取三段论规则
(10) 构造性二难推理规则
(11) 合取引入规则
(12) $\forall$-规则
(13) $\forall$+规则
(14) $\exists$-规则
(15) $\exists$+规则

构造推理证明

例: 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中，构造下面的推理证明.

任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以，存在整数. 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$.

解: 设 $F(x)$: x 为自然数，$G(x)$: x 为整数.

前提: $\forall x(F(x) \to G(x)), \exists x F(x)$

结论: $\exists x G(x)$

证明:

① $\forall x(F(x) \to G(x))$	前提引入
② $F(x) \to G(x)$	① $\forall-$
③ $F(x) \to \exists x G(x)$	② $\exists+$
④ $\exists x F(x)$	前提引入
⑤ $\exists x G(x)$	③④ $\exists-$

作业

习题 3, 4, 5.

- 3-3, 3-7, 3-11, 3-14, 3-16.
- 4-2, 4-5, 4-9, 4-10, 4-13.
- 5-7, 5-8, 5-12, 5-13, 5-15.